صحيفة

٨٤ الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها

٨٤ فى الكلام على ضرب تلك الجذور

٨٥ فى قسمة الجذور

(فى المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)

٩١ فى المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد

٩١ فى المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية

٩٣ فى المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية

٩٧ فى المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية

١٠٦ فى مسائل الدرجة الثانية

(الباب الرابع)

(فى المناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)

١٢٩ فى المناسبة العددية اى التفاضلية

١٣٠ فى المناسبة الهندسية

١٣٤ فى المتواليات العددية

١٣٨ مسائل يطلب حلها من الطلبة

١٣٨ فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية

١٤٣ مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية

١٤٥ فى اللوغاريتم

١٤٩ فى اللوغاريتمات التى اساسها ١٠ واستعمال الجداول اللوغاريتمية

١٥٠ فى المتمم اللوغاريتمى

١٥٣ فى استعمال الجداول اللوغاريتمية فى العمليات الحسابية

١٥٣ فى شرح جدول اللوغاريتمات المقرب واستعماله

صحيفة

(الباب الخامس)

في مسائل محلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها ليتمرن التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعده

١٦٠ مسائل تخص الدرجة الاولى

١٦٨ مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية

١٨٢ مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية



علم الجبر

بسم الله الرحمن الرحيم

نعمك يا جابر قلوب المنكسرين * لا يقابلها شكر الشاكرين * اذ لا يجمعها حاصر بعد * ولا يعرف باقى طرحها احد * ضربتها على وجودك براهين * تدكدك بها اساس الملحدين * وقسمتها بحكمتك فلا عتاب * ان فى ذلك لذكرى لاولى الالباب * فهى اجل ان يعرف قدرها * او يدرك بالاستخراج جذرها * فنحمدك اللهم على ما اوليت * ونشكر فضل جودك على ما اسديت * ونصلى ونسلم على سيد ولد عدنان * الذى نسخ دينه جميع الاديان * محمد المنتخب من اعلا ارومه * المبعوث من خير جرثومه * وعلى الخلفاء الراشدين * وآله وصحبه اجمعين * خصوصا سيف السطوة المنتضى * ابى الحسن على المرتضى * القائل من قلب اواه * لا يعرف الجذر الاصم الا الله * ما سجعت حمامة ورقاء * ونحن مشتاق الى اللقاء

وبعد فلما تعلقت ارادة الاصفى الاعظم * والداورى الاكرم * بتربية العساكر المصريه * وعدم حرمانهم من الفنون العسكريه * وكان من جملة وسائلها * ومما لا غناء عنه لمسائلها * علم الجبر * العظيم القدر * صدر أمره الى من اجابه السعد بلبيك * ناظر المدارس الثلاث على بيك * بعمل منتخب لهم لطيف المبنى * جليل القدر فى المعنى * فأحال ذلك على الماهر اللبيب * واللوذعى الاريب * صاحب الفطنة الوفى الوعد * عامر افندى سعد * فانتخبه من مختصر الاعمال الجبريه * الذى ترجمه بالمهندسخانة الخديويه * من حاز من كل فن طرفا * محمد افندى مصطفى * وقد زاد عليه الاول قواعد مهمه * واضاف اليه مسائل نافعة بهجه * ساعده فى ترجمتها من الفرنساويه طويل الباع * ابراهيم افندى البياع * فجاء محتويا على حل المعادلات بالدرجتين * وعلى المتناسبات والمتواليات وما يتعلق بهذين * فان لهما دخلا فى حل المسائل العظيمه * وفى حساب كوم القلل الجسيمه * المعتاد تشكيلها بجبخانات الطوبجيه * وعلى مبحث اللوغاريتم العظيم الاهميه * وقد تم بخاتمة لطيفه * محتوية على مسائل شريفه * مرتبة كترتيب قواعده الكليه * منتخبة للعساكر الحربيه *

(مقدمة)

زعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اول من اشتغل به ولا اصل لهذا الزعم فى الكتب الاسلامية ان الذى اخترعه ابو بكر الخوارزمى وسماه بعلم الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الزمن الذى اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا لما كانت فى ايدى العرب مجاورة لبلاد افريقية اكتسبت هذا العلم منه فى نحو سنة ١١٠٠ ألف ومائة مسيحية وفى نحو سنة ١٥٠٠ ألف وخمسمائة حضر بعض تجار ايطاليا من افريقية بنسخة من كتب هذا العلم الى بلاده فاشتغل به الايطاليون لكن لم يحصلوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل هذا العلم بلاد النمسا واخذ فى التقدم وبلاد الانجليز ثم انتقل الى فرانسا فى سنة ١٥٥٨ ألف وخمسمائة وثمانية وخمسين واسرع فى التقدم على يد

المؤلف فرانسوافييت الباريسى وهو اول شخص طبق الجبر على الهندسة
وفى القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدما واضحا من وقت الى آخر حيث
ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف نيوتن وديكارت الشهيرين وامثالهما
وفى القرن الثامن عشر ظهر المؤلف لجرانج وكوت ولبلاس ونحوهما
من فحول المؤلفين الذين تمموا فوائده ورتبوه ترتيبا منتظما
وبتقدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والطبيعية والميكانيكية والفلكية
والفنون العسكرية بل وجميع الصنائع وبذلك كان هذا العلم من انفع العلوم
لا ينكر فضله الا جاهل وذلك ان علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان فى حيز
الضعف حتى ان كثيرا من مسائله كان مستحيل الحل ومكث على تلك
الاستحالة مدة طويلة وكان ايضا التوصل لبراهين القضايا الهندسية
صعبا اذ لا واسطة اذ ذاك تساعد العقول على مقاصدها فاضطر علماء هذا
العلم للبحث عن اثبات قواعد نظرية عامة حرفية الوضع رقبة المسائل تتسبب
عنها فك بعض المشكلات فاثبتوها وسموها بعلم الجبر وكان تصحيحه على يد أسير
الاوزار * ابراهيم عبد الغفار * مولما تهيأ للتمام * والبس وشاح الختام *
وسمته بالكواكب الدرية * فى الاعمال الجبرية * وقد آن ان نشرع
فى المقصود * فنقول بعون الملك المعبود

(مقدمة فى علم الجبر)

(١) الغرض الاصلى من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام وانما يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسابية وللدلالة على الخطوط أو السطوح والاجسام ان كانت القضية او المسئلة هندسية

(مقدمة فى بيان العلامات والاصطلاحات)

تستعمل العلامات للدلالة بطريق الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارى عليها العمل

فالعلامات الاصلية المستعملة هى

(اولا) علامة + وتدل على جمع عددين حين توضع بينهما ويلفظ بها زائد

مثال ذلك ح + ء يلفظ به ح زائد ء ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد ء الى ح

(وثانيا) علامة — وتدل على ان العدد التالى لها مطروح من العدد السابق لها ويلفظ بها ناقص

مثال ذلك ح — ء يلفظ به ح ناقص ء ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد ء من ح

(وثالثا) علامتا الضرب × و . وكلتاهما تدل على أن كذا مضروب فى كذا ولا تستعمل الثانية الا فى الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين المبينين بحرفين بكتابة احدهما بجانب الآخر بدون فاصل فحاصل ضرب ٥ فى ٧ مثلا يمكن بيانه هكذا ٥ × ٧ وحاصل ضرب ح فى ء يمكن بيانه هكذا

ح × ء أو ح . ء أو ح ء

ويمكن بيان حاصل ضرب كميتين بجعل كل منهما بين قوسين موضوعة احداهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا فى المضاريب المركبة من جزئين أو جملة

اجزاء

اجزاء متفاصلة عن بعضها بعلامة + أو — فحاصل ضرب ح — ء في ح + ء يمكن بيانه هكذا (ح — ء) (ح + ء) وحاصل ضرب ح — ء + هـ في و يبين هكذا (ح — ء + هـ) و

(ورابعا) علامة القسمة هكذا : أو شرطة افقية هكذا — وتستعملان كما تراه فيما اذا طلب مثلا خارج قسمة ح على ء فانه يبين هكذا ح : ء أو $\frac{ح}{ء}$ وكل منهما معناه ح مقسوم على ء

(وخامسا) المكرر وهو العدد الذي يكتب عن يمين عدد آخر مبين بحرف او جملة حروف ويدل على عدد مرات تكرار العدد الآخر

مثال ذلك ٥ ح فانه يدل على أن حرف ح مكرر خمس مرات أي ح + ح + ح + ح + ح

(وسادسا) علامة التساوي هكذا = يلفظ بها مساو وتدل على التساوي بين كميتين قد وضعت بينهما مثال ذلك ح = ء فانه يدل على تساوي المقدار ح بالمقدار ء

(وسابعا) علامتا > و < فان كلتاهما تدل على عدم تساوي الكميتين المفصولتين بها لكن الاولى تدل على الكبر والثانية على الصغر مثال ذلك ح > ء وتلفظ هكذا ح أكبر من ء و ح < ء وتلفظ هكذا ح أصغر من ء

(وثامنا) للدلالة على عدم تساوي كميتين بدون تمييز صغراهما عن كبراهما تستعمل هذه العلامة ≠ مثال ذلك ح ≠ ء وتبين أن ح ليس مساويا ء

(٢) ويوجد علامتان ايضا احداهما تدل على قوة العدد والاخرى على جذره وقوة العدد هي حاصل ضرب مضروبين أو جملة مضاريب كل منهما مساو لهذا العدد ويقال ان العدد مرفوع الى القوة الثانية او الثالثة والرابعة وهكذا اذا كان حاصله مكونا من مضروبين أو ثلاثة مضاريب

أو أربعة وهكذا كل منها مساو لهذا العدد مثال ذلك ح × ح × ح فهذا يدل على القوة الثالثة للعدد ح وتبين قوة العدد بكتابتك عليه ما تلا جهة الشمال بقليل عدد مرات دخوله مضروبا في هذه القوة ويسمى عدد المرات أسا فالقوة الرابعة للعدد ح تكتب هكذا ح^{٤} ويلفظ ح أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة لكن القوة الثانية لعدد تسمى مربعا والقوة الثالثة له تسمى مكعبا

وجذر العدد اصله الذى اذا رفع لدرجة ما تحصل منه العدد المذكور وهذا الجذر يسمى الجذر الثانى أو الثالث وهكذا اذا رفع الى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لانتاج العدد المعلوم فالجذر الثانى يسمى الجذر التربيعى والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبي

فالعدد ٥ هو الجذر الثانى او الجذر التربيعى للعدد ٢٥ و ح هو الجذر الرابع لمقدار ح^{٤} ودرجة جذر العدد هى درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة $\sqrt{\ }$ عليه مكتوبا بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على الجذر التكعيبي للعدد ح بهذه العلامة $\sqrt[٣]{ح}$ ويلفظ بها الجذر التكعيبي لعدد ح ومتى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع ٢ فوق العلامة فالجذر التربيعى للعدد ٧ يكتب هكذا $\sqrt{٧}$

(٣) ويظهر لك ثمرة استعمال الحروف والعلامات الجبرية فى حل ما اذا كان عندنا

مجموع عددين يساوى ٢٥ وفاضلهما يساوى ٩ والمطلوب معرفة كل من هذين العددين

فيمكن حل هذه المسئلة بالقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أخصر وأسهل وذلك بأن يرمز لاصغر العددين المجهولين بالحرف س وحيث كان فاضلهما مساويا للعدد ٩ يكون مقدار العدد الاكبر س + ٩ وحيث أن حاصل جمعهما يجب أن يكون مساويا للعدد ٢٥

يحدث

يحدث هذا التساوى

س + س + ٩ = ٢٥ أو ٢ س + ٩ = ٢٥

وحيث أن ٢ س + ٩ يساوى ٢٥ يكون ٢ س مساويا ٢٥ — ٩

أى ٢ س = ٢٥ — ٩ أى ٢ س = ١٦

ومن حيث أن ٢ س يساوى ١٦ يكون س = نصف ١٦

أو س = $\frac{\text{١٦}}{\text{٢}}$ = ٨ .

فاذن يكون العدد الاصغر مساويا ٨ والاكبر مساويا ٨ + ٩ أى ١٧ لأن ١٧ + ٨ = ٢٥ و ١٧ — ٨ = ٩

فقد ظهر من ذلك أن فى استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة لحل المسئلة غير أن هذا الحل غير عام ولجعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر تستعمل الحروف وكيفية ذلك أن يقال ليكن ح رمزا لحاصل جمع عددين و د رمزا لفاضلهما والمطلوب معرفة كل من العددين فبفرض أن س رمزا للعدد الاصغر يكون الاكبر س + د فيحدث

س + س + د = ح أو

٢ س + د = ح أو

٢ س = ح — د أو

س = $\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}$.

وحيث أن العدد الاصغر يساوى $\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}$ يكون الاكبر الذى هو س + د مساويا $\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}$ + د = $\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}$ + $\frac{\text{٢د}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{ح} - \text{د} + \text{٢د}}{\text{٢}}$

= $\frac{\text{ح} + \text{د}}{\text{٢}}$

فاذن يكون العدد الاصغر مساويا $\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}$ والاكبر مساويا $\frac{\text{ح} + \text{د}}{\text{٢}}$

وليتنبه الى أن هذين الناتجين لا يختصان بمقدارين مرادين من ح و د فحينئذ يكون الحاصل عاما وهذان الناتجان المسميان قانونين يمكن استعمالهما بدون واسطة فى حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه اذا فرض أن المطلوب ايجاد العددين اللذين حاصل جمعهما = ١٣٧ وفاضلهما = ٥٩

يمكن ان يوضع فى هذين القانونين بدل ح العدد ١٣٧ وبدل د العدد ٥٩ فيحدث $\frac{١٣٧+٥٩}{٢}$ اى ٩٨ وهو مقدار العدد الاكبر ثم $\frac{١٣٧-٥٩}{٢}$ أى ٣٩ وهو مقدار العدد الاصغر

ويمكن وضع المقدارين السابقين اللذين هما $\frac{ح+د}{٢}$ و $\frac{ح-د}{٢}$ بهذه الصورة $\frac{ح}{٢}+\frac{د}{٢}$ و $\frac{ح}{٢}-\frac{د}{٢}$ فتنتج قاعدة هى انه متى علم مجموع عددين وفاضلهما استنتج الاكبر منهما بضم نصف الفاضل الى نصف المجموع واستنتج الاصغر بطرح نصف الفاضل من نصف المجموع

(فى الكميات السلبية)

(٤) متى كانت الكمية المراد طرحها اكبر من الكمية التى يراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان الناتج بكيفية مختصرة استنسبوا طرح الكمية الصغرى من الكبرى ووضع العلامة − امام الناتج أى الباقى

فاذا اريد مثلا طرح العدد ٧ من العدد ٥ يطرح العدد ٥ من العدد ٧ فيكون الباقى ٢ فيوضع امامه علامة − فيكون حينئذ − ٢ وكذلك اذا اريد طرح ٩ $ح^{٣}د^{٢}$ من ٤ $ح^{٣}د^{٢}$ فالعملية غير ممكنة لانه لا يمكن طرح تسعة امثال $ح^{٣}د^{٢}$ من اربعة امثال $ح^{٣}د^{٢}$ فاذن يطرح أربعة أمثال $ح^{٣}د^{٢}$ عن تسعة امثال $ح^{٣}د^{٢}$ فالباقى يكون ٥ $ح^{٣}د^{٢}$ ويوضع العلامة − امامه يكون الناتج − ٥ $ح^{٣}د^{٢}$ فكل من المقدارين − ٢ و − ٥ $ح^{٣}د^{٢}$ يسمى بالكمية السالبة

وينتج من ذلك أن الكميات السالبة هى الكميات المسبوقة بالعلامة −

وأما الكميات الموجبة فهى الكميات الخالية منها او المسبوقة بالعلامة +

فعلى مقتضى ذلك تكون الكميات السالبة ناتجة من عملية طرح غير ممكنة

مثال ذلك

تاجر ربح فى السنة الاولى مبلغا قدره ح وخسر فى السنة الثانية مبلغا قدره د فما يكون حال رأس ماله

فالجواب

فالجواب أن يقال اذا كان الربح ح اكبر من الخسارة ء فرأس المال يزيد بقدر ح — ء لكن اذا فاقت الخسارة الربح بأن كان ء > ح فقد نقص رأس المال بقدر ء — ح فاذن كمية ء — ح الدالة على زيادة رأس المال لاتدل الا على عملية طرح مستحيل حيث كان ء > ح فيطرح الاصغر من الاكبر وتوضع العلامة — امام الباقي ليعلم أن الناتج ليس ربحا يضم الى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال

فاذا فرض أن ح = ٧٠٠٠ و ء = ٤٠٠٠ فانه يوجد ربح قدره ٣٠٠٠

واذا فرض أن ح = ٤٠٠٠ و ء = ٧٠٠٠ فانه يوجد خسارة قدرها ٣٠٠٠

لكن يقال على وجه الطرد أن رأس المال ربح بقدر — ٣٠٠٠ ولو كان ذلك خلاف المعتاد

(٥) واذا اعتبرنا حينئذ فى المقدار ح — ء ان المقدار ح ثابت والمقدار ء متزائد من ابتدا الصفر حدثت نواتج متناقصة فتى كان ء = ح يكون الفرق ح — ء مساويا لصفر واذا استمر المقدار ء فى ازدياده حدثت كميات سلبية وكلما كانت ء كبيرة كانت هذه الكميات السلبية كبيرة أيضا باعتبار مقاديرها المطلقة فاذا فرض ح = ٣ وفرض على التوالى

ء = ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و الخ

كانت مقادير

ح — ء = ٣ و ٢ و ١ و ٠ و —١ و —٢ و —٣ و —٤ و —٥ و —٦ و الخ

وحيث أن المقادير السالبة معاقبة للمقادير الموجبة التى هى ٣ و ٢ و ١ و ٠ تعتبر اصغر من صفر ومن حيث ان الكميات السالبة الكبيرة المقدار المطلق تأتى بعد الكميات السالبة الصغيرة المقدار تعتبر اقل منها وبذا يشاهد ان

— ٢ أصغر من صفر و —٥ أصغر من — ٢ وباستعمال العلامتين

> و < يكون

−٢ > ٠ و −٥ > −٢ أو

٠ > −٢ و −٢ > −٥

وينتج من ذلك ان كل كمية سالبة اصغر من صفر وان اصغر الكميتين السالبتين ما كان مقدارها المطلق اكبر

(الباب الاول)

(فى العمليات الجبرية)

(فى تعاريف الحدود المتشابهة واختصارها)

(٦) كل كمية دخل فيها حرف أو جملة حروف تسمى كمية جبرية او مقدارا جبريا لكمية وكل كمية جبرية خلت اجزاؤها من العلامتين − و + تسمى حدا او كمية ذات حد وكل كمية مركبة من جزئين فأكثر تخللتها العلامة − أو + تسمى كمية ذات حدود ثم ان كانت الكمية محتوية على حدين سميت ذات الحدين وان كانت محتوية على ثلاثة سميت ذات الثلاثة حدود فاذا كمية $٤ ح^{٥} د − ٥ ح^{٤}$ من نوع ذات الحدين

(٧) اذا وضع فى المقدار الجبرى أعداد بدل الحروف واجريت عليها العمليات المنوطة بها فالمقدار الناتج يسمى المقدار الرقمى

(مثال ذلك)

اذا فرض فى حد $٤ ح^{٣} د^{٤}$ أن ح = ٢ و د = ١ يكون مقداره الرقمى ٤ × ٨ = ٣٢ ومن البديهى أن المقدار الرقمى لكمية ذات حدود لا يتغير كائنا ما كان ترتيب كتابة حدودها لان الناتج لا يتغير بتغير اى ترتيب اجرى لاجل عمليات جمع اوطرح

(٨) كل مضروب يدخل فى حد يسمى اصلا لهذا الحد وعدد هذه المضاريب يسمى درجة الحد فالحد $٥ ح^{٣} د^{٢} هـ$ مثلا يحتوى على ستة اصول فهو من الدرجة السادسة فحينئذ درجة الحد تساوى حاصل جمع اسس الحروف المحتوى عليها ذلك الحد

ويقال لكمية ذات الحدود متجانسة اذا كانت درجة جميع حدودها

واحدة

واحدة فالكمية ذات الحدود $٣ ح^{٢} ء^{٣} - ٤ ح^{٤} ء - ٧ ح^{٣} ء^{٢} + ٢ ح^{٥}$ مثلا كمية رباعية متجانسة خماسية الدرجة

(٩) الحدود المركبة من احرف متحدة الصورة والاس تسمى حدودا متشابهة ومتى كانت الكمية ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة امكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود $٥ ح^{٢} ء - ٨ ح^{٢} ء + ٧ ح^{٢} ء - ٢ ح^{٢} ء$ يمكن وضعها بهذه الصورة $٥ ح^{٢} ء + ٧ ح^{٢} ء - ٨ ح^{٢} ء - ٢ ح^{٢} ء$

فحدا $٥ ح^{٢} ء$ و $٧ ح^{٢} ء$ يدلان على خمسة امثال $ح^{٢} ء$ زائدا سبعة امثال $ح^{٢} ء$ أعنى $١٢ ح^{٢} ء$ فاذن يمكن استعواضهما بكمية $١٢ ح^{٢} ء$ وحدا $- ٨ ح^{٢} ء$ و $- ٢ ح^{٢} ء$ يؤلان الى كمية $- ١٠ ح^{٢} ء$ كما آل الحدان الموجبان الى كمية $١٢ ح^{٢} ء$ فحينئذ تؤول الكمية ذات الحدود الى $١٢ ح^{٢} ء - ١٠ ح^{٢} ء$ وبها يستدل على انه يلزم طرح $١٠ ح^{٢} ء$ من $١٢ ح^{٢} ء$ فيكون الباقى $٢ ح^{٢} ء$ وهو الذى آلت اليه الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجرى فى

$$٧ ح^{٢} ء - ٩ ح^{٢} ء - ٥ ح^{٢} ء - ٣ ح^{٢} ء + ٦ ح^{٢} ء = ١٣ ح^{٢} ء - ١٧ ح^{٢} ء$$
$$= - ٤ ح^{٢} ء$$

فالقاعدة العمومية لتحويل جملة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع المكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر وتوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسسها الاصلية بجانب الناتج المذكور

(فى الجمع)

(١٠) بجمع الكميتين $٣ ح - ٢ ء$ و $٤ هـ - ٥ و$ يجرى العمل هكذا

٣ح — ٢د

٤ه — ٥و

٣ح — ٢د + ٤ه — ٥و

فيضم اولا ٤ه الى ٣ح — ٢د بان يوضع ٤ه بعد ٣ح — ٢د بالعلامة "+" فيحصل ٣ح — ٢د + ٤ه وحيث ان هذا الناتج اكبر من المطلوب بالمقدار ٥و يطرح ٥و من ٣ح — ٢د + ٤ه اي يكتب ٥و بعده بالعلامة — فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب

٣ح — ٢د + ٤ه — ٥و

واذا كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها فالقاعدة العمومية لجمع جملة كميات ان تكتب متتالية كما هي موجودة ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيه)

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها في العمل ثم يكتب من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

٨ح^{3}د^{2} — ٥ح^{2}د^{3} — ٣حد^{4} + ٧ح^{5}

٦ح^{3}د^{2} — ٢ح^{2}د^{3} + ٤حد^{4}

— ٥ح^{3}د^{2} + ٤ح^{2}د^{3} — ٧حد^{4}

٢ح^{3}د^{2} + ٥ح^{2}د^{3} + ٨حد^{4} — ٧ح^{5}

١١ح^{3}د^{2} + ٢ح^{2}د^{3} + ٢حد^{4}

(في الطرح)

(١١) لطرح الكمية ذات الحدود ٦ح^{2}د^{2} — ٤ح^{3}د^{2} من الكمية ذات الحدود ٥ح^{3}د — ٢حد^{3} يجري العمل هكذا

٥ح^{3}د — ٢حد^{3}

٦ح^{2}د^{2} — ٤ح^{3}د^{2}

٥ح^{3}د — ٢حد^{3} — ٦ح^{2}د^{2} + ٤ح^{3}د^{2}

فيطرح من الكمية ذات الحدود ٥ ح٣ د — ٢ ح د٣ اولا الكمية ٦ ح٢ د٢ بكتابتها بعدها بالعلامة — فيحصل ٥ ح٣ د — ٢ ح د٣ — ٦ ح٢ د٢ لكن حيث ان ٦ ح٢ د٢ اكبر من المطروح بمقدار ٤ ح٣ د٢ فالناتج وهو ٥ ح٣ د — ٢ ح د٣ — ٦ ح٢ د٢ يكون اصغر من الناتج الحقيق بقدر ٤ ح٣ د٢ فيضم له هذا المقدار بالعلامة + فيكون الناتج حينئذ هكذا

٥ ح٣ د — ٢ ح د٣ — ٦ ح٢ د٢ + ٤ ح٣ د٢

واذا كان الناتج الذى هو باقى الطرح محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من اخرى أن تكتب الكمية التى يراد طرحها بجانب الاخرى مع تغيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيهان)

الاول اذا اريد بيان باقى الطرح من غير اجراء العمل فى المثال السابق وضع بهذه الصورة

٥ ح٣ د — ٢ ح د٣ — (٦ ح٢ د٢ — ٤ ح٣ د٢)

اعنى للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثلها تحصر الكمية التى يراد طرحها بين قوسين بهذه الصورة ( ) وتكتب جانب المطروح منه جهة اليسار مفصولة بالعلامة — واذا اريد اجراء عملية الطرح يحذف القوسان وتغير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثانى متى وجدت حدود متشابهة وضعت فى العمل تحت بعضها ثم تغير علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهاك كيفية العمل

٤ ح٣ د٣ — ٧ ح٢ د٤ — ٦ ح د٥ + ٣ د٦

٢ ح٣ د٣ + ٤ ح د٤ — ٥ ح د٥ — ٥ د٦

٢ ح٣ د٢ — ١١ ح٢ د٤ — ح د٥ + ٨ د٦

(١٢) قد اجرينا اثبات قواعد الجمع والطرح على مجموع كميات متنوعة متفاصلة بالآتى + و — فان قلت هل يجب ان تكون هذه القواعد منطبقة على الحدود المنفردة فالجواب أن يقال أن تطبيق هذه القواعد على الكميات السالبة لا معنى له على أن القاعدة التى يراد سلوكها فى التطبيق يحتاج اثباتها الى واسطة وهى غير معلومة لنا فحينئذ لا معنى لجمع العددين + ٧ ح و — ٩ ء ولا لطرح العددين — ٣ ح و — ٨ ء لكن حيث أن علم الجبر يوصل فى الغالب لعمليات من هذا القبيل اتفقوا على أن القواعد المثبتة للكميات ذات الحدود تكون جارية على الحدود المفردة وهى قواعد لا تتوقف الا على حفظ العلامات أو تغيرها ومع ذلك فالتجربة هى التى احوجتهم الى هذا الاتفاق

فحاصل جمع الاعداد — ٥ و — ٧ و — ٣ مثلا هو = ١٥ وباقى طرح — ٧ من — ٥ هو + ٢ لانه بتغيير علامة المطروح — ٧ يصير + ٧ ثم يربط هذا الناتج بالمطروح منه — ٥ فيحدث — ٥ + ٧ أى + ٢

ومثل هذا يقال فى ضرب حدين منفردين ولا حاجة لذكره فى القسمة لأن قواعد عمليات القسمة ناتجة من قواعد عمليات الضرب

(فى الضرب)

(١٣) اذا فرض أولاً أن المطلوب ضرب حد فى آخر كأن يراد مثلاً ضرب $٤ ح^٢ ء^٣$ فى $٣ ح^٣ ء هـ^٢$ فحاصل الضرب يمكن وضعه بهذه الصورة $٤ ح^٢ ء^٣ \times ٣ ح^٣ ء هـ^٢$ أو $٤ \times ح^٢ \times ء^٣ \times ٣ \times ح^٣ \times ء \times هـ^٢$ واذا غير ترتيب المضاريب حدث $٤ \times ٣ \times ح^٢ \times ح^٣ \times ء^٣ \times ء \times هـ^٢$ وبتحليل $ح^٢$ و $ح^٣$ و $ء^٣$ الخ الى مضاريبها يحدث

$٤ \times ٣ \times ح \times ح \times ح \times ح \times ح \times ء \times ء \times ء \times ء \times هـ \times هـ$ ومن حيث أن $٣ \times ٤ = ١٢$ و $ح \times ح \times ح \times ح \times ح = ح^٥$ و $ء \times ء \times ء \times ء = ء^٤$ و $هـ \times هـ = هـ^٢$ يحدث

١٢ × ح × ءْ × هـ٢ = ١٢ حْ ءْ هـ٢ وهذا هو حاصل الضرب المطلوب

فالقاعدة العمومية لضرب حد فى اخر أن يضرب ابتداء مكرر الحد الاول فى مكرر الحد الثانى ثم تكتب على شمال حاصل الضرب المذكور الحروف التى لم تكن مشتركة فى كل من المضروبين كما هى ثم يكتب الحرف المشترك باس مساو لحاصل جمع اسسه فى المضروبين

(تنبيه)

الحالات الثلاث المحصورة فى هذه القاعدة العمومية تسمى قاعدة المكررات وقاعدة الحروف وقاعدة الاسس

(١٤). لضرب كمية ذات حدود فى مثلها نحو ح ــ ء فى هـ ــ و يجرى العمل هكذا

ح ــ ء مضروب
هـ ــ و مضروب فيه

هـ ح ــ هـ ء ــ و ح + و ء حاصل الضرب

فيضرب اولا ح ــ ء فى هـ فحاصل ضرب ح فى هـ يكون مبينا بالحد ح هـ غير أنه بضرب ح فى هـ ازداد المضروب بقدر ء فاذا يكون حاصل الضرب ازيد بمقدار ء مضروبا فى هـ أى بمقدار ء هـ فيلزم أن يطرح هـ ء من ح هـ فيحدث ح هـ ــ هـ ء وبأخذ هـ مضروبا فيه يزداد بمقدار و فحاصل الضرب ح هـ ــ هـ ء يكون ازيد بحاصل ضرب ح ــ ء فى و المساوى ح و ــ ء و كما تقدم فى ايجاد حاصل ضرب ح ــ ء فى هـ فاذا طرح حاصل الضرب ح و ــ ء و كما تقدم فى (بند ١١) من ح هـ ــ هـ ء فالناتج ح هـ ــ هـ ء ــ ح و + ء و هو حاصل الضرب المطلوب وينتج من ذلك انه لضرب كمية ذات حدود فى مثلها يجب أن يضرب كل حد من المضروب فى كل حد من المضروب فيه ويقرن كل حاصل جزئ بالعلامة + اذا اتحدت علامتا مضروبيه وبالعلامة ــ اذا اختلفت

علامتاهما مثال ذلك أن يراد ضرب

$$٥ح^{٢}ى^{٣} - ٤ح^{٣}ى^{٢} + ٣ح^{٥} - ٣ح^{٤}ى + ٧حى^{٤} - ٨ى^{٥} \text{ فى } ٥حى^{٢} - ٧ح^{٢}ى - ٤ى^{٣}$$

وليتنبه الى انه متى اجريت عملية الضرب كما تقدم تختصر الحدود المتشابهة من الحاصل ان وجدت ولتسهيل هذه العملية يرتب المضروبان بالنسبة للدرجة التصاعدية أو التنازلية لحرف واحد فيهما .

ويقال ان الكمية مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف متى كانت اسس هذا الحرف آخذة فى التصاعد أو التنازل من ابتدا الحد الاول الى الحد الاخير فاذا اجريناهذا الترتيب على المضروبين المتقدمين بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح يحدث

$$٣ح^{٥} - ٣ح^{٤}ى - ٤ح^{٣}ى^{٢} + ٥ح^{٢}ى^{٣} + ٧حى^{٤} - ٨ى^{٥}$$

$$-٧ح^{٢}ى + ٥حى^{٢} - ٤ى^{٣}$$

$$-٢١ح^{٧}ى + ٢١ح^{٦}ى^{٢} + ٢٨ح^{٥}ى^{٣} - ٣٥ح^{٤}ى^{٤} - ٤٩ح^{٣}ى^{٥} + ٥٦ح^{٢}ى^{٦}$$

$$+١٥ح^{٦}ى^{٢} - ١٥ح^{٥}ى^{٣} - ٢٠ح^{٤}ى^{٤} + ٢٥ح^{٣}ى^{٥} + ٣٥ح^{٢}ى^{٦} - ٤٠حى^{٧}$$

$$-١٢ح^{٥}ى^{٣} + ١٢ح^{٤}ى^{٤} + ١٦ح^{٣}ى^{٥} - ٢٠ح^{٢}ى^{٦} - ٢٨حى^{٧} + ٣٢ى^{٨}$$

$$-٢١ح^{٧}ى + ٣٦ح^{٦}ى^{٢} + ح^{٥}ى^{٣} - ٤٣ح^{٤}ى^{٤} - ٨ح^{٣}ى^{٥} + ٧١ح^{٢}ى^{٦} - ٦٨حى^{٧} + ٣٢ى^{٨}$$

فيهتم غاية الاهتمام بوضع الحدود المتشابهة تحت بعضها فى اجراء عمل المضاريب الجزئية وبعد اجراء الاختصار يحدث عين مامر

$$-٢١ح^{٧}ى + ٣٦ح^{٦}ى^{٢} + ح^{٥}ى^{٣} - ٤٣ح^{٤}ى^{٤} - ٨ح^{٣}ى^{٥} + ٧١ح^{٢}ى^{٦} - ٦٨حى^{٧} + ٣٢ى^{٨}$$

فالقاعدة العمومية لتحصيل حاصل ضرب كيتين ذاتى حدود فى بعضهما ان ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف واحد فيهما ويضرب كل حد من المضروب فى كل حد من المضروب فيه ثم يقرن حاصلهما بالعلامة + اذا اتحدت علامتاهما أو بالعلامة — اذا

اختلاف علامتاهما ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيه)

متى رتب مضروبا حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد فحاصل ضرب الحد الاول من المضروب فى الحد الاول من المضروب فيه يحتوى على حرف الترتيب باسّ ما اكبر من كل من اسسه فى الحواصل الاخر الجزئية لانهما الحدان المشتملان على حرف الترتيب بأس اكبر من أس كل من الحدود المشتملة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل جزئ لا يمكن اختصاره مع آخر يكون هو الحد الاول لحاصل الضرب المطلوب المرتب بترتيب مضاربيه

ومثل ذلك يقال فى حاصل ضرب الحد الاخير من المضروب فى الحد الاخير من المضروب فيه فيكون هو الحد الاخير لحاصل الضرب المطلوب

ومثل ذلك يقال ايضا فى ترتيب الكميتين ذاتى الحدود بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الاول لحاصل الضرب الاصلى اصغر من أس كل من الحدود الاخر وأس الحد الاخير اكبرها

فعلى ذلك اذا كان حاصل الضرب مرتبا ترتيب مضروبيه فالحد الاول منه يكون فى الحقيقة حاصل ضرب الحد الاول من المضروب فى الحد الاول من المضروب فيه والحد الاخير منه يكون فى الحقيقة حاصل الضرب للحد الاخير من المضروب فى الحد الاخير من المضروب فيه

(١٥) اقل عدد الحدود التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما اثنان لانه قد ثبت ان حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود يكون مشتملا اقل ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما واكثر عدد الحدود التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما يكون مساويا لحاصل ضرب عدد حدود المضروب فى عدد حدود المضروب فيه اذا لم يحتو هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود متجانسة كمية ذات حدود متجانسة

درجتها مساوية لحاصل جمع درجتي مضروبيها لان درجة كل حاصل ضرب جزئي تساوي حاصل جمع درجتي مضروبيه كما هي قاعدة ضرب حدين في بعضهما واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسه متحد في بعض حدودها او في جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تحصر هذه الحدود بين قوسين ماعدا الحرف المذكور وتجعل مكررا للحرف المذكور مثال ذلك .

٢ح^{٣}د^{٢} ــ ٣هـ^{٢}ح^{٣} ــ ٣هـدح^{٣} فترقم هكذا

(٢د^{٢} ــ ٣دهـ ــ ٣هـ^{٢})ح^{٣}

فالكمية ٢د^{٢} ــ ٣دهـ ــ ٣هـ^{٢} تعتبر مكررا للحرف ح^{٣} وهي مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف د ولك ان ترتبها بحسب الدرجات التنازلية للحرف هـ هكذا

(ــ ٣هـ^{٢} ــ ٣دهـ + ٢د^{٢})ح^{٣}

ويمكن وضع الكمية (ــ ٣هـ^{٢} ــ ٣دهـ + ٢د^{٢})ح^{٣} مرتبة بهذه الصورة او بهذه الصورة

+ ٢د^{٢}	ح^{٣}	ــ ٣هـ^{٢}	ح^{٣}
ــ ٣دهـ		ــ ٣دهـ	
ــ ٣هـ^{٢}		+ ٢د^{٢}	

وسياتي استعمال ذلك في القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية الضرب يكون على كيفيتي الوضعين المتقدمين وهاك مثالا لتوضيح ذلك

(الكيفية الاولى)

(٢د ــ هـ)ح^{٢} ــ (٤د^{٢} + ٢دهـ ∓ هـ^{٢})ح مضروب

(٢د + هـ)ح + و مضروب فيه

(٤د^{٢} ــ هـ^{٢})ح^{٣} ــ (٨د^{٣} + هـ^{٣}) ح^{٢}

+ (٢د ــ هـ) ح^{٢}و ــ (٤د^{٢} ــ ٢دهـ + هـ^{٢})حو

(٤د^{٢} ــ هـ^{٢})ح^{٣} ــ (٨د^{٣} + هـ^{٣} ــ ٢دو + هـو)ح^{٢} ــ (٤د^{٢}و ــ ٢دهـو + هـ^{٢}و)ح حاصل الضرب

فاذا

فاذا انعدم ضرب جزء فى آخر ضربا على حديهما كالمعتاد ثم يوضع حاصل الضرب الجزئى فى مرتبته

(الكيفية الثانية)

مضروب:
+ ٢ د − هـ | ح² − ٤ د² + ٢ د هـ − هـ² | ح

مضروب فيه:
+ ٢ د + هـ | ح + و

+ ٤ د² − ٢ د هـ + ٢ د هـ − هـ² | ح³ − ٨ د³ + ٤ د² هـ − ٢ د هـ² − ٤ د² هـ + ٢ د هـ² − هـ³ + ٢ و د − و هـ | ح²

− ٤ و د² + ٢ د هـ و − و هـ² | ح

حاصل الضرب:
+ ٤ د² − هـ² | ح³ − ٨ د³ − هـ³ + ٢ و د − و هـ | ح² − ٤ و د² + ٢ د هـ و − و هـ² | ح

(قواعد)

(١٧) الاولى اذا اجريت عملية ضرب (ح + د) فى (ح + د) أى مربع ح + د يحدث

(ح + د)² = ح² + ٢ ح د + د²

وينتج من ذلك أن مربع كمية ذات حدين يحتوى على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الحد الثانى

الثانية اذا ضرب $ح^{٢} + ٢حد + د^{٢}$ فى $ح + د$ يحدث مكعب $ح + د$ اى $(ح + د)^{٣} = ح^{٣} + ٣ح^{٢}د + ٣حد^{٢} + د^{٣}$

وينتج من ذلك ان مكعب كمية ذات حدين يحتوى على مكعب الحد الاول زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال تربيع الاول فى الثانى زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال الاول فى تربيع الثانى زائدا مكعب الثانى

الثالثة اذا ضرب $(ح + د)$ فى $(ح - د)$ ينتج

$$(ح + د)(ح - د) = ح^{٢} - د^{٢}$$

وينتج من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كميتين فى فاضلهما يساوى الفرق بين مربعيهما فيكون الفرق بين مربعى كميتين مساويا لحاصل ضرب جمع جذريهما فى فاضل الجذرين مثال ذلك

$$٢٥ح^{٤}د^{٢} - ٩ح^{٢}د^{٤} = (٥ح^{٢}د + ٣حد^{٢})(٥ح^{٢}د - ٣حد^{٢})$$ وكذا

$$ح - د = (\sqrt{ح} + \sqrt{د})(\sqrt{ح} - \sqrt{د})$$

(فى القسمة)

(١٨) اذا كان المطلوب قسمة حد على اخر يقال

اولا مكرر خارج القسمة يستنتج من تقسيم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوى حاصل ضرب مكررى مضروبيه كما فى (بند ١٣) يكون مكرر المقسوم مساويا لحاصل ضرب مكرر المقسوم عليه فى مكرر خارج القسمة فحينئذ يكون مكرر خارج القسمة مساويا لمكرر المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كما فى قاعدة الاسس

وثانيا اذا كان المقسوم محتويا على حرف ليس فى المقسوم عليه يكتب فى خارج القسمة عين ما فى المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فكل حرف ليس فى المقسوم عليه وهو داخل فى المقسوم

يكتب

يكتب فى خارج القسمة (انظر بند ١٣٠ فى قاعدة الحروف)

وثالثا اذا اتحد حرف فى المقسوم والمقسوم عليه يكتب ذلك الحرف فى خارج القسمة بأس مساو لاسه فى المقسوم ناقصا أسه فى المقسوم عليه لان المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فحينئذ يكون اس الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع اسيه فى المقسوم عليه وخارج القسمة كما فى (بند ١٣) فاذن يكون أس الحرف من خارج القسمة مساويا لاسه فى المقسوم ناقصا اسه فى المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)

ورابعا اذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج القسمة + واذا اختلفت فيهما كانت علامته − لانه اذا فرض أن علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذى هو عبارة عن حاصل ضرب ناقص يكون علامتا مضروبيه متخالفة كما فى (بند ١٤) وحيث أن علامة المقسوم عليه الذى هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة خارج القسمة الذى هو عبارة عن المضروب الآخر ناقصا (انظر قاعدة العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه وتكتب الحروف الذى يحتوى عليها المقسوم دون المقسوم عليه عقب الناتج الاول باسها الكائنة فى المقسوم ثم تكتب الحروف المشتركة الكائنة فى المقسوم والمقسوم عليه بأس مساو لفاضل اسها الكائنة بها فى المقسوم والمقسوم عليه ويوضع فى خارج القسمة علامة + اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة − اذا اختلفت علامتاهما وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم ٢٤ س^٥ ح^٣ د^٢ على ٦ س^٢ ح هكذا

$$\frac{٢٤ س^{٥} ح^{٣} د^{٢}}{٦ س^{٢} ح} = ٤ س^{٣} ح^{٢} د^{٢}$$

(تنبيه)

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكرر المقسوم غير قابل للقسمة على مكرر المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود فى المقسوم أو ...

إس حرف من المقسوم عليه اكبر من اسه فى المقسوم فاذا وجدت حالة من هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعتيادى يختصر فقط ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضاريب المشتركة فى كل من حديه فحينئذ خارج قسمة ٢٤ $ح^{٥}$ $ء^{٤}$ هـ على ١٨ $ح^{٣}$ $ء^{٦}$ $و^{٢}$ يوضع بهذه الصورة

$$\frac{٢٤\ ح^{٥}\ ء^{٤}\ هـ}{١٨\ ح^{٣}\ ء^{٦}\ و^{٢}} = \frac{٤\ ح^{٢}\ هـ}{٣\ ء^{٢}\ و^{٢}}$$

بحذف المضروب المشترك ٦ $ح^{٣}$ $ء^{٤}$ من كل من الحدين

(١٩) اذا قسم $ح^{م}$ على $ح^{م}$ جريا على قاعدة الاسس يحدث $\frac{ح^{م}}{ح^{م}} = ح^{٠}$ ومن البديهى أن $\frac{ح^{م}}{ح^{م}} = ١$ فاذن يكون $ح^{٠} = ١$ وينتج من ذلك أن كل حرف اسه صفر يساوى واحدا

(٢٠) ولنشتغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها فنفرض أن المقسوم أ + ب + ح + ء الخ والمقسوم عليه $أ'$ + $ب'$ + $ح'$ + $ء'$ الخ وخارج القسمة المجهول $أ''$ + $ب''$ + $ح''$ + $ء''$ الخ والرموز ا و ب و ح و $أ'$ و $ب'$ و $ح'$ و $أ''$ و $ب''$ و $ح''$ دالة على حدود اياما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف س فاذن يكون وضع العمل هكذا

المقسوم	المقسوم عليه وخارج القسمة
ا + ب + ح + ء + ... الخ	$أ'$ + $ب'$ + $ح'$ + ... الخ
م + ن + ع + ... الخ	$أ''$ + $ب''$ + $ح''$ + ... الخ
ر + ص + ... الخ	

ثم يقال من المعلوم ان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا فى خارج القسمة وتقدم فى (تنبيه بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروباه مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب اول حد من المضروب فى اول حد من المضروب فيه فيكون ا مساويا لحاصل ضرب $أ''$ × $أ'$ واذا يستنتج $أ''$ بتقسيم ا على $أ'$ وحيث علم الحد $أ''$ يضرب المقسوم عليه فى هذا الحد ويطرح حاصل الضرب من المقسوم فينتج باق بهذه الصورة م + ن + ع + ... الخ

لايحتوى الا على حاصل ضرب المقسوم عليه فى جزء خارج القسمة بَ + حَ + الخ وحيث أن حاصل الضرب م + ن + ع ومضاريبه أَ + بَ + حَ + الخ و بَ + حَ + الخ مرتبة بكيفية واحدة يكون م مساويا الحاصل ضرب أَ فى بَ (كما فى تنبيه ١٤) فاذن يستنتج بَ بتقسيم م على أ ثم يضرب بَ فى المقسوم عليه ويطرح الحاصل من الباقى م + ن + ع فينتج باق جديد بهذه الصورة ر + ص ... الخ وبمثل ما تقدم يتوصل الى تقسيم ر على أ لحدوث حَ وهلم جرا

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعدية او التنازلية لحرف واحد ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه فى الحد الاول من خارج القسمة ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقى على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الثانى من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه فى الحد الثانى من خارج القسمة ويطرح الحاصل من الباقى الاول فيحدث باق ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد الثالث من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال حتى يصير الباقى صفرا أو غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه

وإيضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم ذات الحدود $١٨ حى^{٤}$ − $٤٨ حى^{٤}$
− $١٠ حى^{٢٣}$ + $٣٥ ح^{٥}$ + $٤٤ حى^{٣٢}$ على $٤ حى$ − $٦ ى^{٢}$ + $٥ ح^{٢}$ هكذا

المقسوم	المقسوم عليه / خارج القسمة
$٣٥ح^{٥}$ + $١٨حى^{٤}$ − $١٠حى^{٢٣}$ + $٤٤حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	$٥ح^{٢}$ + $٤حى$ − $٦ى^{٢}$
− $٣٥ح^{٥}$ − $٢٨حى^{٤}$ + $٤٢حى^{٢٣}$	$٧ح^{٣}$ − $٢حى^{٢}$ + $٨حى^{٢}$
− $١٠حى^{٤}$ + $٣٢حى^{٢٣}$ + $٤٤حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	الباقي الأول
+ $١٠حى^{٤}$ + $٨حى^{٢٣}$ − $١٢حى^{٣٢}$	
+ $٤٠حى^{٢٣}$ + $٣٢حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	الباقي الثاني
− $٤٠حى^{٢٣}$ − $٣٢حى^{٣٢}$ + $٤٨حى^{٤}$	
٠٠ ٠٠ ٠٠	الباقي الثالث

فبعد ترتيب ذاتي الحدود بالنسبة للدرجة التنازلية للحرف ح يقسم $٣٥ح^{٥}$ على $٥ح^{٢}$ فيحدث $٧ح^{٣}$ وهو الحد الأول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه في $٧ح^{٣}$ ويطرح الحاصل من المقسوم بتغيير علامات كل من الحواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المشابهة لحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو − $١٠حى^{٤}$ + $٣٢حى^{٢٣}$ + $٤٤حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$ ثم يقسم الحد الأول − $١٠حى^{٤}$ من هذا الباقي على $٥ح^{٢}$ فيحدث − $٢حى^{٢}$ وهو الحد الثاني من خارج القسمة ثم يجري العمل على هذا المنوال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج القسمة في المقسوم عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل هكذا

المقسوم	المقسوم عليه / خارج القسمة
$٣٥ح^{٥}$ + $١٨حى^{٤}$ − $١٠حى^{٢٣}$ + $٤٤حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	$٥ح^{٢}$ + $٤حى$ − $٦ى^{٢}$
الباقي الأول − $١٠حى^{٤}$ + $٣٢حى^{٢٣}$ + $٤٤حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	$٧ح^{٣}$ − $٢حى^{٢}$ + $٨حى^{٢}$
الباقي الثاني + $٤٠حى^{٢٣}$ + $٣٢حى^{٣٢}$ − $٤٨حى^{٤}$	

فبعد

فبعد استنتاج ٧ ح اعنى الحد الأول من خارج القسمة يضرب ٧ ح فى ٥ ح د فيحدث ٣٥ ح^{٥} ولطرحه يجعل — ٣٥ ح^{٥} وحاصل ضرب + ٤ ح د فى ٧ ح^{٣} يحدث عنه ٢٨ ح^{٤} د ولطرحه يجعل — ٢٨ ح^{٤} د وهو حد ينبغى اختصاره مع + ١٨ ح^{٤} د فيصير — ١٠ ح^{٤} د ثم يجرى العمل على هذا الاسلوب .

(تنبيهان)

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر كمل خارج القسمة بكسر بسطه الباقى المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثانى تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم غير قابل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه اوكان الحدان الاخيران منهما كذلك اوكان الحد الاول من اى باق لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه اوكان المقسوم والمقسوم عليه مرتبين بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف كالحرف س وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة أصغر من اسه فى الحد الاخير من المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باق فالحد الاخير من المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه فى الحد الاخير من خارج القسمة فاذن يكون أس س فى الحد الاخير من المقسوم مساويا لحاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة وهذا مناقض لما فرضناه من أن حاصل جمع أسى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من أس الحد الاخير من المقسوم مع أن أس س يجب أن يكون دائما متناقصا فى خارج القسمة

وكذلك لاتكون القسمة ممكنة متى كانت ذاتا الحدود مرتبتين بحسب الدرجات التصاعدية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع اسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من اسه فى الحد الاخير من المقسوم

(٢١) قد يكون حرف الترتيب فى ذات الحدود باس واحد فى حدين او اكثر فيجرى عليها ما تقدم من الوضع فى (بند ١٦) بأن توضع على احدى الصورتين المتقدمتين مثال ذلك

٥ د^{٣} ج^{٢} — ٨ د^{٢} ج^{٢} — ٣ د ج^{٢} فيمكن وضعها على احدى هاتين الصورتين

(٥ د^{٣} — ٨ د^{٢} — ٣ د) ج^{٢} أو ج^{٢} | + ٥ د^{٣} / — ٨ د^{٢} / — ٣ د

المتين يدل وضع ج^{٢} فيهما على انه مضروب فى الجملة ٥ د^{٣} — ٨ د^{٢} — ٣ د معتبرة مكررا لحرف الترتيب ج^{٢} ولا نجرى فى اعمال التقسيم الآتية الا على الصورة الثانية فاذا اريد تقسيم أ س^{٤} + ب س^{٣} + ج س^{٢} + د س + ر على أَ س + بَ فالمكررات ا و ب و ج الخ و أَ و بَ تدل على كميات ذات حدود فحيث أن الاس الاعظم للحرف س فى المقسوم ٤ واسه فى المقسوم عليه واحد يكون اسه فى خارج القسمة ٣ وحيث أن أصغر أس للحرف س فى المقسوم والمقسوم عليه صفر يكون فى خارج القسمة صفرا ايضا ويكون الخارج بهذه الصورة أً س^{٣} + بً س^{٢} + جً س + دً فعلى ذلك لا يلزم لمعرفة خارج القسمة الا تعيين المكررات أً و بً و جً الخ وصورة العمل هكذا

المقسوم	المقسوم عليه / خارج القسمة
أ س^{٤} + ب س^{٣} + ج س^{٢} + د س + ر	أَ س + بَ
+ م س^{٣} + ج س^{٢} + د س + ر	أً س^{٣} + بً س^{٢} + جً س + دً
+ الخ + الخ	

فتعيين المكرر أً يجب التنبيه على انه اذا ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فالحاصل الجزءى الناتج من ضرب أَ س فى أً س^{٣} لا يختصر مع حدود اخرى من الكلى لانه يحتوى على اس س بدرجة اعلا من درجته

فى

في بقية الحواصل الجزئية فيكون الحاصل المذكور مساويا ا $س^{٤}$ فاذن
يكون ا $س^{٤}$ = أَ س × أ $س^{٣}$ ومنها يستخرج ا = اَ × أ
أو أ = $\frac{ا}{أَ}$ وحيث علم المكرر أ بضرب المقسوم عليه في أ $س^{٣}$
ويطرح الحاصل من المقسوم فالباقي م $س^{٣}$ + ح $س^{٢}$ + ءَ س + ر
لا يحتوى الا على حاصل ضرب المقسوم عليه في الجزء بَ $س^{٢}$ + حَ س
+ ءُ من خارج القسمة فيستخرج بَ بتقسيم م على أَ وعلى هذا
المنوال يكون العمل وحالة التقسيم هذه ليست غير الحالة العامة لانه
بتقسيم مكرر اول حد من المقسوم على مكرر اول حد من المقسوم عليه
يتوصل الى تقسيم كمية ذات حدود على مثلها

وبيان ذلك في تقسيم الكمية ذات الحدود

٢٢ $د^{٢}ح^{٢}$ + $د^{٢}$ − ٢ د − ٦ د $ح^{٤}$ − ٢٠ $ح^{٣}$ − ٩ د $ح^{٢}$ − ٥ ح + ٢٣ $د^{٣}ح^{٢}$ − ١٠ $ح^{٤}$

− ٧ $د^{٢}ح^{٣}$ − ٣١ $د^{٢}ح$ + $ح^{٣}$ − ٥ ح + ٣ $د^{٣}ح^{٢}$ + ٢٠ د $ح^{٣}$ + ٥ د ح على $د^{٢}$ + ٣ د ح
− ٥ ح − ٢ د فترتب كلتا هاتين الكميتين بالنسبة للدرجات التازلية
للحرف ح وتجمع الحروف المشتملة على حرف الترتيب بدرجة واحدة
وصورة العمل هكذا

ح^٤ | +٦ى −١٠ | ح^٣ | −٢٠ +٢٣ى −٧ى^٢ | ح^٢ | +٢٢ى −٢١ى +٥ −٣ى^٣ | ح | −٩ى −٥ +٤ى^٢ +٥ى | ح^٣ + ى − ٢ى | ٣ى −٥ || ح^٣ + ى − ٢ى

٢ح^٣ | −٣ى ح^٢ | +٤ ح | ى^٢ +٤ | −١ | ح + ١

−٣٠ ح^٣ +٢٧ى −٩ى^٢

ح^٢ | +١٢ى −٢٣ى +٥

−٥ +٣ى | ح + ى^٢ − ٢ى

اول قسمة جزئية

٦ى − ١٠ | ٣ى − ٥ | ٢

ثانى قسمة جزئية

−٩ى^٢ +٢٧ى −٢٠ | ٣ى − ٥ | −٣ى + ٤

١٢ى − ٢٠

ثالث قسمة جزئية

١٢ى^٢ −٢٣ى +٥ | ٣ى − ٥ | ٤ى − ١

−٣ى +٥

رابع قسمة جزئية

٣ى −٥ | ٣ى − ٥ | ١

٠٠ ٠٠

فيلزم أن يكون الحد الاول من خارج القسمة محتويا على ح^٣ ولتحصيل مكرره يقسم مكرر ٦ى — ١٠ على مكرر ٣ى — ٥ (وهذه اول قسمة جزئية) وناتجها ٢ فاذن يكون الحد الاول من خارج القسمة ٢ح^٣ ثم يضرب المقسوم عليه فى ٢ح^٣ أى يضرب ٣ى | −٥ ح فى ٢ح^٣ فيحصل ٦ى | −١٠ ح^٤

هذا

وهذا الحد يتماحى مع اول حد من المقسوم وحيث أن حاصل ضرب الباقى من المقسوم عليه فى ٢ ح^{٣} يقبل الاختصار مع الجزء التالى من المقسوم يؤل هذا الحاصل بعد اختصاره الى

ــ ٢٠	ح^{٣}
+ ٢٧ ء	١
ــ ٩ ء^{٢}	

وحيث ان الجزء التالى من خارج القسمة يجب أن يكون محتويا على ح^{٢} فلتعيين مكرره يقسم ــ ٢٠ + ٢٧ ء ــ ٩ ء^{٢} على ٣ ء ــ ٥ (وهذه هى ثانى قسمة جزئية) ثم يجرى العمل على هذا المنوال ه س ١ ،

(٢٢) وهنالك حالة شهيرة فى التقسيم الجبرى وهى الحالة التى يكون فيها المقسوم عليه غير محتو على حرف الترتيب لمقسوم كما اذا اريد تقسيم الكمية ذات الحدود ا س^{٢} + ب س + ح على م فالمكررات ا و ب و ح و م يمكن أن تكون كميات ذات حدود وحيث أن م لا يحتوى على الحرف س يكون خارج القسمة محتويا على حرف الترتيب بدرجته الكائن بها فى المقسوم وبناء عليه يكون بهذه الصورة اَ س^{٢} + بَ س + حَ فاذن لا يحتاج الا لتعيين المكررات اَ و بَ و حَ فحواصل ضرب المقسوم عليه فى حدود خارج القسمة تكون م اَ س^{٢} و م بَ س و م حَ وهى حواصل لا يقبل بعضها الاختصار مع الآخر لانها محتوية على س باسس مختلفة فتكون حينئذ مساوية للاجزاء المقابلة لها من المقسوم كل لنظيره فيحدث حينئذ بحذف المضاريب المشتركة س^{٢} و س ان

$$\text{اَ م} = \text{ا} \qquad\qquad \text{اَ} = \frac{\text{ا}}{\text{م}}$$

$$\text{بَ م} = \text{ب} \quad \text{وينتج من ذلك} \quad \text{بَ} = \frac{\text{ب}}{\text{م}}$$

$$\text{حَ م} = \text{ح} \qquad\qquad \text{حَ} = \frac{\text{ح}}{\text{م}}$$

فحينئذ يقال متى كان المقسوم عليه خاليا من حرف ترتيب المقسوم يلزم لامكان

القسمة أن يكون مكرر كل قوة لهذا الحرف من المقسوم قابلا للقسمة على المقسوم عليه وان يكون حرف الترتيب داخلا فى خارج القسمة باس عين اسه فى المقسوم ثم يستنتج كل مكرر من خارج القسمة بتقسيم مكرر كل قوة لحرف الترتيب من المقسوم على المقسوم عليه ولنطبق هذه القاعدة على مثال فنقول

اذا اريد تقسيم ٦ د + ٨ $ح^{٢}$ $د^{٣}$ — ٩ $ح^{٢}$ هـ — ٩ هـ + ٤ $ح^{٢}$ د — ٢٧ $ح^{٢}$ $هـ^{٣}$

على ٢ د — ٣ هـ توضع صورة العمل كما سبق فى الحالة المتقدمة هكذا

+ ٨ $د^{٣}$ — ٢٧ $هـ^{٣}$ | + $ح$ | ٤ $د^{٢}$ — ٩ $هـ^{٢}$ | + $ح^{٢}$ | ٦ د — ٩ هـ || ٢ د — ٣ هـ

خارج القسمة: + ٤ $د^{٢}$ + ٦ د هـ + ٩ $هـ^{٢}$ | + ح | ٢ د + ٣ هـ | + $ح^{٢}$ ٣

القسمة الجزئية الاولى

٨ $د^{٣}$ — ٢٧ $هـ^{٣}$ | ٢ د — ٣ هـ
١٢ $د^{٢}$ هـ — ٢٧ $هـ^{٣}$ | ٤ $د^{٢}$ + ٦ د هـ + ٩ $هـ^{٢}$
١٨ د $هـ^{٢}$ — ٢٧ $هـ^{٣}$
. .

القسمة الجزئية الثانية

٤ $د^{٢}$ — ٩ $هـ^{٢}$ | ٢ د — ٣ هـ
٦ د هـ — ٩ $هـ^{٢}$ | + ٢ د + ٣ هـ

القسمة الجزئية الثالثة

٦ د — ٩ هـ | ٢ د — ٣ هـ
.. .. | ٣

(٢٣) مما يحتاج اليه غالبا تحليل مقدار جبرى الى حاصل ضرب مركب من مضروبين احدهما معلوم والآخر مجهول ومن البديهى ان استخراج المضروب المجهول يكون بتقسيم الكمية الجبرية المفروضة على المضروب المعلوم

فاذا اريد مثلا تحويل ١٢ $ح^{٥}$ $د^{٢}$ — ٤ $ح^{٣}$ $د^{٢}$ الى مضروبين احدهما ٤ $ح^{٣}$

ينتج $٤ح^{٣} (٣ح^{٢}ء^{٢} - ء^{٣})$ وهذا هو المسمى بوضع $٤ح^{٣}$ مضروبا مشتركا

واذا اريد جعل $٣حء^{٢}$ مضروبا مشتركا فى المقدار $٦ح^{٣}ء^{٣} - ٣حء^{٢} - ٣حء^{٢}$ يحدث $٣حء^{٢} (٢حء^{٢} - ١ - \frac{ء٢}{٣ح})$

(٢٤) فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة يقبل القسمة على الفرق بينهما غير مرفوعتين لانه اذا ابتدأ بتقسيم $ح^{م} - ء^{م}$ على $ح - ء$ بان وضعت صورة العمل هكذا

المقسوم	المقسوم عليه وخارج القسمة
$ح^{م} - ء^{م}$	$ح - ء$
$ح^{م} - ح^{م-١}ء$	$ح^{م-١} + ح^{م-٢}ء + ح^{م-٣}ء^{٢}$
$ح^{م-١}ء - ء^{م}$	

نتج $ح^{م-١}$ وهو اول حد من خارج القسمة وكان الباقى الاول $ح^{م-١}ء - ء^{م}$ وحيث أن المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا فى خارج القسمة زائدا الباقى يحدث

$$ح^{م} - ء^{م} = (ح - ء) ح^{م-١} + ح^{م-١}ء - ء^{م}$$

واذا وضع ء مضروبا مشتركا فى الحدين الاخيرين $ح^{م-١}ء$ و $ء^{م}$ حدث $ح^{م} - ء^{م} = (ح - ء) ح^{م-١} + ء (ح^{م-١} - ء^{م-١})$

ومن المعلوم أن $ح^{م} - ء^{م}$ حاصل جمع جزءين $(ح - ء) ح^{م-١}$ و $ء (ح^{م-١} - ء^{م-١})$ لكن الجزء الاول وهو $(ح - ء) ح^{م-١}$ قابل للقسمة على $ح - ء$ فاذا كان الجزء الثانى $ء (ح^{م-١} - ء^{م-١})$ قابلا للقسمة على $ح - ء$ كان حاصل جمعهما $ح^{م} - ء^{م}$ كذلك لكن الجزء الثانى $ء (ح^{م-١} - ء^{م-١})$ حاصل ضرب مركب من مضروبين فيكفى بجعل

هذا الحاصل قابلا للقسمة على $ح - ء$ أن يكون احد مضروبية ($ح^{م-١} - ء^{م-١}$) قابلا للقسمة على $ح - ء$. فاذا كان $ح^{م-١} - ء^{م-١}$ قابلا للقسمة على $ح - ء$ يكون $ح^{م} - ء^{م}$ كذلك أعني اذا كان فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلا رفع يكون فاضل الكميتين المذكورتين مرفوعتين لقوة اعلى بواحد من قوتهما الاصلية قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلا رفع

وحيث علم أن الفاضل $ح^{٢} - ء^{٢}$ يقبل القسمة على $ح - ء$ لأن $ح^{٢} - ء^{٢} = (ح + ء)(ح - ء)$ يكون $ح^{٣} - ء^{٣}$ قابلا للقسمة على $ح - ء$ فحينئذ $ح^{٤} - ء^{٤}$ يقبل القسمة على $ح - ء$ وهكذا. فتكون هذه القاعدة عامة الاثبات

فحينئذ اذا اجرى العمل على $ح^{٦} - ء^{٦}$ يحدث

$$\frac{ح^{٦} - ء^{٦}}{ح - ء} = ح^{٥} + ح^{٤}ء + ح^{٣}ء^{٢} + ح^{٢}ء^{٣} + حء^{٤} + ء^{٥}$$

وعلى هذا المنوال يكون

$$\frac{ح^{م} - ء^{م}}{ح - ء} = ح^{م-١} + ح^{م-٢}ء + ح^{م-٣}ء^{٢} + \cdots + ح^{٢}ء^{م-٣} + حء^{م-٢} + ء^{م-١}$$

فينتج من كيفية تكوين خارج قسمة $ح^{م} - ء^{م}$ على $ح - ء$

اولا ان جميع حدود خارج القسمة تكون موجبة

وثانيا أن جميع المكررات تكون مساوية للوحدة

وثالثا أن اس حرف $ح$ يتناقص بواحد على التوالى من ابتداء الحد الاول الذى اسه $م - ١$ الى الحد الاخير الذى اسه صفر.

ورابعا أن اس حرف $ء$ يتزايد بواحد من ابتداء الحد الاول الذى اسه صفر الى الحد الاخير الذى اسه يكون مساويا ($م - ١$)

(٢٥) ولنذكر هنا نتائج فنقول

الاولى $ح^م + ء^م$ لاتقبل القسمة على $ح - ء$

الثانية $ح^م - ء^م$ تقبل القسمة على $ح + ء$ اذا كان م زوجا فان كان فردا فلا تقبل القسمة على $ح + ء$

والثالثة $ح^م + ء^م$ تقبل القسمة على $ح + ء$ اذا كان م فردا ولاتقبل القسمة على $ح + ء$ اذا كان م زوجا ولنبرهن على هذه النتائج مع السهولة بواسطة القواعد الآتية فى البند التالى وان كان يمكن البرهنة عليها ايضا من غير واسطة باجراء عملية التقسيم على وجه التجربة اى اختبار الحالة التى فيها تنتهى العملية والتى لاتنتهى فيها فنقول

(٢٦) اذا فرض فى الكمية ذات الحدود

$س^م + ع س^{م-١} + ك س^{م-٢} + \cdots + ر س + ل$ أن $س = ح$

وآلت به الى صفر تكون هذه الكمية قابلة للقسمة على $س - ح$ لانه اذا اجريت قسمة هذه الكمية على $س - ح$ هكذا

$$س^م + ع س^{م-١} + ك س^{م-٢} + \cdots + ر س + ل \quad | \quad س - ح$$

$$(ح + ع) س^{م-١} + ك س^{م-٢} + \cdots + ر س + ل$$

$$(ح^٢ + ع ح + ك) س^{م-٢} + \cdots + ر س + ل$$

خارج القسمة:

$$س^{م-١} + (ح + ع) س^{م-٢} + (ح^٢ + ع ح + ك) س^{م-٣} + \cdots + (ح^{م-١} + ع ح^{م-٢} + ك ح^{م-٣} + \cdots + ر)$$

يكون $س^{م-١}$ هو الحد الاول من خارج القسمة و $(ح + ع) س^{م-١}$ هو اول حد من الباقى بوضع $س^{م-١}$ مضروبا مشتركا فى الحدين المحتويين على

$\text{س}^{\text{م}-١}$ ويكون الحد الثانى من خارج القسمة $(\text{ح} + \text{ج})\,\text{س}^{\text{م}-٢}$ والحد الاول من الباقى التالى له هو $(\text{ح}^{٢} + \text{ج}\,\text{ح} + \text{ل})\,\text{س}^{\text{م}-٢}$ وبهذه الكيفية تدام العملية

فمتى توصل الى باق حده الاول لا يحتوى الاعلى س بأس مساو للواحد كان لهذا الحد الاول من هذا الباقى مكرر بهذه الصورة

$\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \text{ل}\,\text{ح}^{\text{م}-٣} + \cdots + \text{ر}$ والحد التالى لخارج القسمة يكون

$\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \text{ل}\,\text{ح}^{\text{م}-٣} + \cdots + \text{ر}$ وبناء عليه يكون الباقى التالى لهذا الحد هو

$$\text{ح}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ل}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{ر}\,\text{ح} + \text{ل}$$

وهو باق لا يخالف الكمية ذات الحدود المفروضة الا بوضع ح فيه بدل س فاذا اعتبر الفرض الاول المتقدم أى فرض $\text{س} = \text{ح}$ الذى به تؤول الكمية الى صفر يكون الباقى وهو $\text{ح}^{\text{م}} + \text{ج}\,\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ل}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \cdots\cdots + \text{ر}\,\text{ح} + \text{ل}$ مساويا للصفر ويكون التقسيم ممكنا

(فى الكسور)

(٢٧) الكسر الجبرى يدل كما فى الحساب على خارج قسمة البسط على المقام فعلى هذا يكون كسر $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ دالا على خارج قسمة ح على ء

والبراهين التى اجريت فى علم الحساب لبيان القواعد المسلوكة فى العمليات المتعددة للكسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا التعريف نتيجة له

وقد فرض فى هذه البراهين أن الحدين ح و ء عددان صحيحان لكن هذان الحدان قد يكونان فى علم الجبر كسرين فاذن يجب علينا أن نبين جميع القواعد المتعلقة بالكسور فنقول

الاولى اذا ضرب بسط كسر فى كمية ما أو قسم عليها كان ذلك الكسر

مضروبا

مضروبا في هذه الكمية أو مقسوما عليها فاذا فرض $\frac{ح}{د}$ مثلا كسرا معلوما ورمز له بالحرف ك وضرب بسطه في ن كان ذلك الكسر مضروبا في ن لانه ينتج من $\frac{ح}{د} = ك$ أن $ح = دك$ فاذا ضرب طرفا هذه المتساوية في ن يحدث $حن = ندك$ ومنها ينتج $\frac{حن}{د} = نك = \frac{ح}{د} \times ن$

ومثل هذا يقال في $\frac{ح : ن}{د} = ك : ن$

الثانية اذا ضرب مقام كسر في كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر مقسوما على هذه الكمية أو مضروبا فيها وعلى هذا يبرهن بمثل ما تقدم

الثالثة اذا ضرب حدا الكسر في كمية واحدة أو قسما عليها فقيمة الكسر لا تتغير ويعلم من ذلك انه يمكن اختصار كسر بتقسيم حديه على مضروب مشترك احتويا عليه فحينئذ

$$\frac{١٢ ح^{٥} د^{٢}}{٨ ح^{٣} د^{٤}} = \frac{٣ ح^{٢}}{٢ د^{٢}}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة في الحساب لتحويل كسور الى ذات مقام واحد يمكن استعمالها في الجبر فاذا اريد مثلا تحويل الكسور $\frac{ح}{د}$ و $\frac{هـ}{و}$ و $\frac{م}{ن}$ الى ذات مقام واحد كان الناتج المطلوب بعد اجراء العملية $\frac{حون}{دون}$ و $\frac{هدن}{دون}$ و $\frac{مدو}{دون}$ واذا اريد تحويل الكسور $\frac{م}{١٢ ح د^{٤}}$ و $\frac{ن}{١٥ ح^{٥}}$ و $\frac{ع}{١٠ ح د^{٤}}$ الى ذات مقام واحد يقال حيث وجد للمقامات مضاريب مشتركة تختصر القاعدة العمومية بأن يبحث كما في الحساب عن المضاعف الاصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحلل اولا كل من المقامات الى مضاريب اولية فيحدث حينئذ

$$١٢ ح د^{٤} = ٢^{٢} \times ٣ \times ح \times د^{٤} \quad ، \quad ١٥ ح^{٥} = ٣ \times ٥ \times ح^{٥} \quad و \quad ١٠ ح د^{٤} = ٢ \times ٥ \times ح \times د^{٤}$$

ثم يحصل حينئذ حاصل ضرب يحتوي على المضاريب الاصلية المتقدمة باعلى اس موجود فيها هكذا

$$٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times ح^{٥} \times د^{٤}$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذى يمكن اعطاؤه للكسور المفروضة فلم يبق الاضرب حدى كل كسر من الكسور المتقدمة فى خارج قسمة ٢ ٢ × ٣ × ٥ × جـ ٥ × ء ٤ على مقامه فاذن يضرب حدا الكسر الاول فى ٥ جـ ء ٣ والثانى فى ٤ ء ٤ والثالث فى ٦ جـ ٤ فيحدث

(٥ جـ ء م ٣)/(٦٠ جـ ء ٤٥) و (٤ ء ٤ ...)/(٦٠ جـ ء ٤٥) و (٦ جـ ٤ ح)/(٦٠ جـ ء ٤٥)

الرابعة لطرح كسرين أو جملة كسور ذات مقام مشترك او جمعهما تجرى عملية الطرح أو الجمع على البسوط ثم يعطى للناتج المقام المشترك لانه اذا أجرى العمل على الكسور جـ/م + ء/م − هـ/م مثلا وفرض أن الناتج المطلوب س كان جـ/م + ء/م − هـ/م = س فحينئذ يضرب كل من الطرفين فى م فيحدث

جـ + ء − هـ = م س وينتج من ذلك

س = (جـ + ء − هـ)/م

فاذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متحدة ابتدئ بتحويلها الى ذات مقام واحد ثم يجرى عليها ما فى القاعدة المتقدمة

الخامسة اضرب كسر فى آخر يضرب بسط أحدهما فى بسط الآخر ومقامه فى مقامه ويجعل الحاصل الثانى مقاما للحاصل الاول فاذا اريد ضرب جـ/ء فى هـ/و مثلا فبفرض أن ح رمز للكسر الاول و ك رمز للثانى يوجد جـ = ء ح و هـ = و ك فاذن يكون

جـ × هـ = ء × ح × و × ك أو جـ هـ = ء و ح ك فيكون

(جـ هـ)/(ء و) = ح × ك أو (جـ هـ)/(ء و) = جـ/ء × هـ/و

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح فى كسر يضرب الصحيح فى بسط الكسر ثم يجعل مقام الكسر المفروض مقاما لذلك الحاصل

السادسة لتقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذى هو عبارة عن المقسوم

فى الكسر الذى هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فاذا فرض ان $\frac{ح}{د}$ مقسوم على $\frac{هـ}{و}$ ويجعل $\frac{ح}{د} = ع$ و $\frac{هـ}{و} = ل$ يكون $ح = د\,ع$ و $هـ = و\,ل$ ومنها يحدث

$$\frac{ح}{هـ} = \frac{د\,ع}{و\,ل} \text{ أو } \frac{ح}{د\,هـ} = \frac{ع}{و\,ل} \text{ أو } \frac{ح\,و}{د\,هـ} = \frac{ع}{ل} \text{ أو } \frac{ح}{د} \div \frac{هـ}{و} = \frac{ح\,و}{د\,هـ}$$

وبمثل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح فى الكسر مقلوبا

(فى الاسس السالبة)

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه فى المقسوم عليه كانت القسمة مستحيلة فقسمة $ح^{٣}$ على $ح^{٥}$ مستحيلة لكنهم اتفقوا على تبيين خارج القسمة بكتابة حرف $ح$ باس مساو للفاضل $٣ - ٥$ أى -٢ فاذن يكون $\frac{ح^{٣}}{ح^{٥}} = ح^{-٢}$

وينتج من ذلك انه اذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناتجا من عملية قسمة مستحيلة

(٢٩) الحرف ذو الاس السالب يساوى واحدا مقسوما على هذا الحرف باسه موجبا فاذا قسم $ح^{م}$ على $ح^{م+ع}$ تحصل بمقتضى ماتقدم فى (٢٨)

$$\frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}} = ح^{م-م-ع} = ح^{-ع} \text{ وحيث أن } \frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}} = \frac{ح^{م}}{ح^{م}\times ح^{ع}}$$

يقال اذا قسم كل من حدى هذا الكسر على $ح^{م}$ حدث $\frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}}$ $= \frac{١}{ح^{ع}}$ ومعلوم أن $ح^{م}$ مقسوما على $ح^{م+ع}$ مساو $ح^{-ع}$ فيكون

$$ح^{-ع} = \frac{١}{ح^{ع}}$$

(٣٠) قد برهنا سابقا فى قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على ان هذه القاعدة توافق الاسس السالبة فحاصل $ح^{م}$ فى $ح^{-ن}$ مثلا يكون مساويا $ح^{م-ن}$ لان $ح^{م} \times ح^{-ن} = ح^{م} \times \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{ح^{م}}{ح^{ن}} = ح^{م-ن}$ وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخر

فحينئذ قاعدة الاسس الموجبة فى تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب

بيان ذلك بالامثلة أن يقال

لضرب $ح^{-م}$ فى $ح^{-ن}$ يقال $ح^{-م} \times ح^{-ن} = \frac{1}{ح^{م}} \times \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{1}{ح^{م+ن}} = ح^{-(م+ن)}$

ولقسمة $ح^{م}$ على $ح^{-ن}$ يجرى العمل هكذا $ح^{م} : ح^{-ن} = ح^{م} : \frac{1}{ح^{ن}} = ح^{م+ن}$

ولقسمة $ح^{-م}$ على $ح^{-ن}$ يجرى العمل هكذا $ح^{-م} : ح^{-ن} = \frac{1}{ح^{م}} : \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{ح^{ن}}{ح^{م}} = ح^{ن-م}$

ولايجاد حاصل ضرب كميتين مشتملتين على حدود كسرية او خارج قسمة ما على بعض تحول الكميتان الى اخريين صحيحتين باستعمال الاسس السلبية من غير تغيير مكررات حدودها الرقمية ثم ترتب الاسس المذكورة باعتبارها اعدادا اصغر من صفر تاخذ فى الصغر كلما ازدادت فى المقدار المطلق ثم تجرى عليها طرق الضرب أو القسمة فاذا اريد مثلا ضرب $\frac{3}{س^{2}} + س^{2} - 2 + \frac{1}{س^{2}} - 2س$ فى $\frac{2}{س} - 3 - س$ يوضعان هكذا

$$\text{س}^{2} - 2\text{س} - 2 + \tfrac{1}{3}\text{س}^{-1} + \tfrac{3}{2}\text{س}^{-2}$$

$$-\text{س} - 3 + 2\text{س}^{-1}$$

$$-\text{س}^{3} + 2\text{س}^{2} + 2\text{س} - \tfrac{1}{3}\text{س}^{0} - \tfrac{3}{2}\text{س}^{-1}$$

$$-3\text{س}^{2} + 6\text{س} + 6\text{س}^{0} - \text{س}^{-1} - \tfrac{9}{2}\text{س}^{-2}$$

$$+ 2\text{س} - 4\text{س}^{0} - 4\text{س}^{-1} + \tfrac{2}{3}\text{س}^{-2} + \tfrac{6}{2}\text{س}^{-3}$$

$$-\text{س}^{3} - \text{س}^{2} + 10\text{س} + \tfrac{5}{3}\text{س}^{0} - \tfrac{13}{2}\text{س}^{-1} - \tfrac{23}{6}\text{س}^{-2} + 3\text{س}^{-3}$$

فيشاهد أن الحاصل مرتب من نفسه وان حده الاول والاخير ليسا مختصرين وان الاول حادث من ضرب الحدين الاولين في بعضهما والاخير من ضرب الاخيرين في بعضهما ومثل ذلك يجرى في عملية التقسيم

(الباب الثانى)

(فى المعادلات والمسائل التى بدرجة اولى)

(٣١) الكميتان المتساويتان اللتان لا يحتويان الا على اعداد معلومة مبينة بحروف يسميان متساوية وذلك كالمتساوية $\text{ح} + \text{ء} = \text{هـ} - \text{و}$ التى فيها ح و ء و هـ و و دالة على كميات معلومة

والمتساوية متى تحققت بمقادير الحروف المعلومة أو المجهولة الداخلة فيها كائنة ما كانت تسمى متطابقة وذلك كالمتطابقة

$$\text{ح}^{2} - \text{ء}^{2} = (\text{ح}+\text{ء})(\text{ح}-\text{ء}) \quad \text{و} \quad 3\text{س} - \text{ح}^{2} = 2\text{س} + \text{س} - \text{ح}^{2}$$

والمتساوية التى لا يتحقق تساويها الا بمقادير مخصوصة للمجاهيل الداخلة فيها تسمى معادلة فحينئذ $3\text{س} - 5 = 7$ معادلة لان تساويها لا يتحقق بأى مقدار فرض للمجهول س

كل من الكميتين المفصولتين عن بعضهما فى كل متساوية بالعلامة = تسمى طرفا لكن الكمية التى على اليمين تسمى الطرف الاول والتى على اليسار

المعادلة الرقمية ما كانت الكميات المعلومة فيها مبينة بارقام والحرفية ما كانت الكميات المذكورة فيها مبينة بحروف فحينئذ ٣ س — ٥ = ٧ معادلة رقمية و ٣ س — ح = ء معادلة حرفية

وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذى إذا وضع بدل مجهولها صيرها متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة

متى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير التى اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة

وهذه المعادلات تمتاز احداها عن الاخرى بدرجتها

واذا جمعت اسس مجاهيل كل حد من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على درجة المعادلة فحينئذ معادلة ٣ ص — ٥ = ٧ معادلة ذات درجة اولى ومعادلة ٥ ص — ٢ $ص^{٢}$ = ٩ معادلة ذات درجة ثانية ومعادلة ٣ ص — $\frac{٤}{٩}$ — ٧ $س^{٢}$ = ٨ $ص^{٢}$ ص معادلة ذات درجة ثالثة

وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا فى المعادلة مقام الكسر اذ لا يحكم بدرجة المعادلة فى هذه الحالة الا بعد حذف المقامات بالطريقة الآتية

وتتميز المعادلات المتحدة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها

واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد

(فى بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى)
(والمجهول الواحد)

(٣٢) ولنذكر بعض قواعد متعارفة فنقول

تعادل المعادلة لا يتغير

اولا اذا ضم لكل من طرفيها كمية واحدة أو طرحت من كل منهما
وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها فى كمية واحدة أو قسم كل منهما عليها
وثالثا اذا جمعت معادلتان الى بعضهما بان جمع الطرف الاول للاول والثانى للثانى اوطرحتا من بعضهما أو ضربتا فى بعضهما أو قسمتا على بعضهما

فحيث تقرر ذلك يجب أن نشتغل بالتحويلين المهمين فنقول

الاول كل معادلة كالمعادلة $\text{٥ س} - \text{٤} = \text{٢ س} + \text{٧}$ يلزم لحلها أن يكون المجهول فى الطرف الاول منها ولتحصيل ذلك يطرح من كلا طرفيها ٢ س فتصير ٥ س — ٤ — ٢ س = ٧ ثم يضم الى كل من طرفيها ٤ فتصير ٥ س — ٢ س = ٧ + ٤ فالحد ٢ س الذى كان فى الطرف الثانى موجبا صار فى الطرف الاول سالبا و ٤ الذى كان فى الطرف الاول سالبا صار فى الطرف الثانى موجبا فاذن يلزم لتحويل حد من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثانى كل معادلة كالمعادلة $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}} - \frac{\text{٤}}{\text{٥}} + \text{٧} = \frac{\text{س}}{\text{٢}}$ يلزم لحلها ان تحذف المقامات ولذا تحول اولا الكسور والعدد الصحيح ٧ الى ذات مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فتصير $\frac{\text{٢٠س}}{\text{٣٠}} - \frac{\text{٢٤}}{\text{٣٠}} + \frac{\text{٢١٠}}{\text{٣٠}} = \frac{\text{١٥س}}{\text{٣٠}}$ ثم يضرب كل من طرفى هذه المعادلة فى ٣٠ لحذف المقام فتصير

$$\text{٢٠ س} - \text{٢٤} + \text{٢١٠} = \text{١٥ س}$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشترك أى أنه لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر فى حاصل ضرب مقامات الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح فى حاصل ضرب المقامات

(تنبيه)

هذه القاعدة تختصر فى الحالة التى يكون فيها لمقامات المعلومة مضاريب مشتركة

فالمعادلة $\frac{\text{٥س}}{\text{٦}} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢س}}{\text{٩}} + \text{٧}$ المحتوية على مقامات ذات مضاريب

مشتركة يسهل فيها تحويل جميع الكسور والعدد الصحيح الى ذوات مقام واحد باخذ المكرر الاصغر المشترك وهو ٣٦ مقاما مشتركا لجميع المقامات فاذن يكفى ضرب الصحيح فى ٣٦ ثم ضرب حدى كل كسر فى خارج قسمة ٣٦ على مقام هذا الكسر فيحدث بعد حذف المقام المشترك

٣٠ س − ٢٧ = ٨ س + ٢٥٢

فحينئذ يلزم لحذف مقامات معادلة ذات مضاريب مشتركة أن يبحث عن المكرر المشترك الاصغر لهذه المقامات ويضرب العدد الصحيح فيه ثم يضرب بسط كل كسر فى خارج قسمة المكرر المذكور على مقام هذا الكسر

(٣٣) لنطبق هذه القاعدة على حل المعادلة

٧(٢س−٣)/١٥ − ١/١٠ = ٤ + ٣س/٤

تجرى عملية الضرب المبينة فى بسط الكسر الاول فيحصل

(١٤س−٢١)/١٥ − ١/١٠ = ٤ + ٣س/٤

ثم تحذف المقامات بملاحظة العدد ٦٠ مكررا مشتركا أصغر للاعداد ١٥ و ١٠ و ٤ فيحدث

٥٦ س − ٨٤ − ٦ = ٢٤٠ + ٤٥ س

ثم تحول الحدود المجهولة الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الثانى فتصير المعادلة

٥٦ س − ٤٥ س = ٢٤٠ + ٨٤ + ٦

وبعد الاختصار تصير

١١ س = ٣٣٠ وبقسمة طرفيها على ١١ يحدث

س = ٣٣٠/١١ = ٣٠ أى س = ٣٠ ولتحقيق هذا المقدار يوضع العدد ٣٠ فى المعادلة ٧(٢س−٣)/١٥ − ١/١٠ = ٤ + ٣س/٤ بدل س فتصير ٧(٦٠−٣)/١٥ − ١/١٠ = ٤ + ٩٠/٤ ومنها يستنتج

٧×٥٧/١٥

$$\frac{٧\times٥٧}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٤٥}{٢}$$ أى

$$\frac{١٣٣}{٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٤٥}{٢}$$ أى

$$٢٦٦ - ١ = ٤٠ + ٢٢٥$$ أى

$$٢٦٥ = ٢٦٥$$

وحيث غير المجهول س فى المعادلة المفروضة بالمقدار ٣٠ فصارت متطابقة يكون العدد ٣٠ هو حل هذه المعادلة وبحل المعادلة

$$\frac{\text{ب س}}{٦\text{ح}^٢} - ١ = \frac{\text{ح}(\text{س} - ٢\text{ب})}{٤\text{ب}^٢} - \frac{\text{ح}(\text{ح}^٢ - \text{ب}^٢)}{٢\text{ب}^٣} - \frac{٢}{٣}$$

تجرى عملية الضرب المبين فيها وتحذف المقامات بملاحظة أن ١٢ $\text{ح}^٢\text{ب}^٣$ هو المضروب المشترك الاصغر لجميع المقامات فيحدث

$$٢\text{ب}^٤\text{س} - ١٢\text{ح}^٢\text{ب}^٣ = ٣\text{ح}^٣\text{ب س} - ٦\text{ح}^٣\text{ب}^٢ - ٦\text{ح}^٥ + ٦\text{ح}^٣\text{ب}^٢ - ٨\text{ح}^٢\text{ب}^٣$$

أو يحدث بعد ترك حدى $- ٦\text{ح}^٣\text{ب}^٢$ و $+ ٦\text{ح}^٣\text{ب}^٢$ المتماحيان وتحويل المجاهيل الى الطرف الاول والمعاليم الى الثانى

$$٢\text{ب}^٤\text{س} - ٣\text{ح}^٣\text{ب س} = ١٢\text{ح}^٢\text{ب}^٣ - ٦\text{ح}^٥ - ٨\text{ح}^٢\text{ب}^٣$$

ثم يوضع س مضروبا مشتركا فى الطرف الاول ويختصر الحدود المتشابهة وهى $+ ١٢\text{ح}^٢\text{ب}^٣$ و $- ٨\text{ح}^٢\text{ب}^٣$ الموجودة فى الطرف الثانى فيحدث

$$(٢\text{ب}^٤ - ٣\text{ح}^٣\text{ب})\,\text{س} = ٤\text{ح}^٢\text{ب}^٣ - ٦\text{ح}^٥$$

وبقسمة طرفيها على مكرر س يحدث

$$\text{س} = \frac{٤\text{ح}^٢\text{ب}^٣ - ٦\text{ح}^٥}{٢\text{ب}^٤ - ٣\text{ح}^٣\text{ب}}$$

ويمكن اختصار مقدار س بوضع ٢ $\text{ح}^٢$ مضروبا مشتركا فى البسط و ب مضروبا مشتركا فى المقام فيصير

$$س = \frac{ح^{٢}(ب^{٣} - ح^{٣})}{ب^{٢}(ب^{٣} - ح^{٣})} = \frac{ح^{٢}}{ب^{٢}}$$

ولتحقيق هذا المقدار يغير المجهول س في المعادلة المفروضة بمقداره وهو

$\frac{ح^{٢}}{ب}$ وبهذا التغيير يعلم هل المعادلة متطابقة ام لا

(قاعدة عمومية)

لحل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يلزم

اولا اجراء عملية الضرب الكائن فيها ان وجدت ثم حذف المقامات

وثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجاهيل الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار الحدود المجهولة لتصير حدا واحدا ان كانت المعادلة رقمية وجعل المجهول مضروبا مشتركا ان كانت المعادلة حرفية

ورابعا تقسيم طرفها الثاني على المكرر الرقمي أو الحرفي للمجهول لخارج القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوي الواقع بين طرفيها الا انه لو فرضت معادلة $٥س - ٢ = ٣س + ٥$ وحولت جميع حدود الطرف الاول الى الثاني وحدود الثاني الى الاول لصارت $-٣س - ٥ = -٥س + ٢$ وبعكس الطرفين يحدث $-٥س + ٢ = -٣س - ٥$ وهي لا تخالف المعادلة الاولى الا بتغيير علامات جميع حدودها

(في المعادلات ذات الدرجة الاولى وجملة المجاهيل)

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لانه اذا فرض لاحد المجهولين مقدار اختياري حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له فاذا فرضت معادلة $٣س - ٢ص = ٥$ وجعل فيها $ص =$

حدث $س = \frac{٥+٢}{٣} = \frac{٧}{٣}$ فاذن يكون مقدار $س = \frac{٧}{٣}$ ومقدا

صـ = ١ حلا للمعادلة وكلما فرض للمجهول صـ مقدارما وجد للمجهول سـ مقدار جديد فيكون للمعادلة المفروضة حلول غير متناهية العدد

(٣٦) ولنشتغل الآن بحل معادلتين ذاتى مجهولين بطرق أربع فنقول الطريقة الاولى طريقة الوضع وهى حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى فى الثانية فاذا فرضت معادلتان

$$٣ سـ + ٤ صـ = ١٠ \quad و$$

$$٥ سـ - ٧ صـ = ٣$$

واريد حذف احد المجهولين منهما يستخرج من احداهما مقداره بفرض الآخر معلوما فاذا استخرج مقدار صـ من الاولى بفرض سـ معلوما حدث $\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤} = صـ$ وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الثانية تصير محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ سـ - \frac{٧٠ - ٢١ سـ}{٤} = ٣$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احداهما مقدار احد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يغير هذا المجهول بمقداره فى المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوى او المقارنة وهى حذف احد المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل منهما وتسوية هذين المقدارين ببعضهما فاذا اريد حذف احد المجهولين صـ من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احداهما صـ = $\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤}$ ومن الاخرى صـ = $\frac{٥ سـ - ٣}{٧}$ وبتساوى هذين المقدارين تحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤} = \frac{٥ سـ - ٣}{٧}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتى مجهولين بواسطة طريقة التساوى أن يستخرج من كل منهما مقدار أحد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما

الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح
فاذا فرض أن المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

٥ س − ٣ ص = ٩ و

٢ س + ٣ ص = ١٢

وجب التنبيه على أن ص له مكرر متحد فى المعادلتين المذكورتين ذو علامتين متخالفتين فلحذفه يكفى جمع هاتين المعادلتين الى بعضهما طرفا الى طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

٥ س + ٢ س = ٩ + ١٢

واذا فرض ان المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

٣ س + ٤ ص = ١٠ و ٥ س − ٧ ص = ٣

وجب اولا ان يجعل مكرر ص فيهما واحدا بضرب طرفى المعادلة الاولى فى مكرر ص من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفى المعادلة الثانية فى مكرر ص من الاولى وهو ٤ فيحدث

٢١ س + ٢٨ ص = ٧٠ و

٢٠ س − ٢٨ ص = ١٢

فاذا جمعت هاتان المعادلتان الى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد هكذا ٢١ س + ٢٠ س = ٧٠ + ١٢

واذا اتحدت علامة المجهول ص فى كل من المعادلتين أجرى طرح المعادلتين من بعضهما طرفا من طرف عوض جمعهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتى مجهولين بطريقة الجمع أو الطرح أن يجعل مكرر المجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين واحدا وطريق الوصول الى ذلك أن يضرب طرفا المعادلة الاولى فى مكرر هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفا الثانية فى مكرر المجهول المذكور من الاولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح احداهما من الاخرى بحسب اختلاف واتحاد علامته فى كل من المعادلتين المفروضتين

(تنبيه)

(تنبيه)

الغرض من ضرب طرفى كل من المعادلتين فى مكرر المجهول المراد حذفه تصيير المعادلتين محتويتين على هذا المجهول بمكرر واحد ويمكن الوصول الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون لمكررى هذا المجهول مضروب مشترك فاذا فرض أن المراد حذف ص من المعادلتين

$$٥ س + ٦ ص = ٣٨ \quad و$$

$$٧ س + ٨ ص = ٣٨$$

فالمكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضروبا مشتركا يبحث عن المقسوم الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وحينئذ يسهل تحويل المعادلتين لتصيرا محتويتين على المجهول ص بمكرر ٢٤ بضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٤ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفى المعادلة الثانية فى ٣ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيحدث

$$٢٠ س + ٢٤ ص = ١١٢ \quad و$$

$$٢١ س + ٢٤ ص = ١١٤$$

وهذه الكيفية المختصرة هى المشاهدة فى علم الحساب فى كيفية تحويل الكسور الى كسور اخصر مقاما مشتركا

فالقاعدة التى يراد سلوكها هنا عين التى هناك

الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان ٥ س + ٦ ص = ٣٨ و ٧ س + ٨ ص = ٣٨ تضرب حدود المعادلة الاولى فى م ثم تجمع الثانية اليها طرفا الى طرف فيحدث

$$٥ م س + ٧ س + ٦ م ص + ٨ ص = ٣٨ م + ٣٨$$

ثم يوضع س و ص مضروبين مشتركين فى الحدود المشتملة عليهما فيحصل

$$(٥ م + ٧) س + (٦ م + ٨) ص = ٣٨ م + ٣٨$$

وانما لم تعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف صـ مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

٦م + ٨ = ٠ ومنه يستخرج م = − $\frac{٨}{٦}$ = − $\frac{٤}{٣}$ ثم تستعوض كيتا م و ٦ م + ٨ فى معادلة (٥ م + ٧) سـ + (٦ م + ٨) صـ = ٢٨ م ∓ ٣٨ بالمقدارين − $\frac{٤}{٣}$ وصفر وبهذا تؤل الى (− $\frac{٢٠}{٣}$ + ٧) سـ = − $\frac{١١٢}{٣}$ + ٣٨

فاذن يكون المجهول صـ قد انحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير المعينة ان تضرب احدى المعادلتين فى كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى المعادلة الاخرى طرفا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروبا مشتركا فى الحدود المشتملة عليه ثم يسوى مكرر المجهول المراد حذفه بصفر فيصير محذوفا ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من الفرض المتقدم

(تنبيه)

اسهل الطرق الاربعة فى العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لا تحدث مقاما فى المعادلة الناتجة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند ما يكون مكرر المجهول المراد حذفه مساويا للواحد فى احدى المعادلتين ذاتى المجهولين

(٣٧) لحل معادلتين ذاتى مجهولين و درجة اولى كمعادلتى

٧ سـ − ٨ صـ = ٥ و ٥ سـ − ١٢ صـ = − ٩ يحذف المجهول صـ بضرب المعادلة الاولى فى ٣ والثانية فى ٢ ثم تطرح الثانية من الاولى فيحدث

١١ سـ = ٣٣ ومنها يستخرج سـ = $\frac{٣٣}{١١}$ = ٣

ولاستخراج مقدار المجهول صـ يوضع مقدار المجهول سـ بدله فى احدى المعادلتين فيوضع فى الاولى مثلا مقدار سـ بدله فتصير

٢١ — ٨ صـ = ٥ ومنها يحدث صـ = $\frac{٢١-٥}{٨}$ = ٢

فالقاعدة العمومية لحل معادلتين ذاتى مجهولين ودرجة اولى أن يحذف احد المجهولين منهما فتنتج معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله فى احدى المعادلتين فتؤل الى معادلة محتوية على المجهول الثانى ثم يستخرج منها مقداره

(٣٨) وبمقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة مجاهيل فاذا فرض مثلا

٥ سـ — ٨ صـ + ٣ ع = —١٩ و

٢ سـ + ٣ صـ — ٦ ع = ٩ و

٧ سـ — ٢ صـ — ٢ ع = ٧

يحذف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى فى ٢ ثم ضم الناتج الى الثانية فيحدث

١٢ سـ — ١٣ صـ = — ٢٩ (١)

ثم يحذف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة فى ٣ ثم طرح الثانية من الحاصل فيحدث

١٩ سـ — ٩ صـ = ١٢ (٢)

ثم يحذف المجهول صـ من المعادلتين (١) و(٢) ذاتى الدرجة الاولى والمجهولين بأن تضرب الاولى فى ٩ والثانية فى ١٣ ثم تطرح الاولى من الثانية فيحدث

١٣٩ سـ = ٤١٧ ومنها يحدث سـ = $\frac{٤١٧}{١٣٩}$ = ٣

ثم يستخرج مقدار المجهول صـ بوضع مقدار سـ عوضا عنه فى احدى المعادلتين (١) و(٢) فيحدث

٣٦ — ١٣ صـ = — ٢٩ ومنها ينتج

صـ = $\frac{٢٩+٣٦}{١٣}$ = ٥

ثم لاستخراج مقدار ع يوضع فى احدى المعادلات الثلاث المشتملة كل منها

على الثلاثة مجاهيل مقدار المجهول س ومقدار المجهول ص بدلهما فتؤول المعادلة المذكورة الى معادلة محتوية على المجهول ع فقط فاذا وضع مثلا بدل س و ص مقداراهما في المعادلة الثالثة آلت الى ٢١ — ١٠ — ٢ع = ٧ ومنها يحدث ع = $\frac{٢١-١٠-٧}{٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ فالقاعدة العمومية لحل ثلاث معادلات كلاها ذات ثلاثة مجاهيل ودرجة اولى ان يحذف احد المجاهيل من احدى المعادلات مع كل من المعادلتين الاخريين على التوالي فيتوصل الى معادلتين كلاهما ذات مجهولين ثم يحذف المجهول الثاني من هاتين المعادلتين فتحصل معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج مقداره منها ويوضع في احدى المعادلتين ذاتي المجهولين ثم يستخرج مقدار المجهول الثاني ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين المستخرجين في احدى المعادلات ذوات الثلاثة مجاهيل ثم يستخرج مقدار المجهول الثالث منها فنرى

(٣٩) فبناء على هذه القاعدة يمكن التوصل الى القاعدة التي بها تحل اربع معادلات كلاها ذات اربعة مجاهيل وخمس معادلات كلاها ذات خمسة مجاهيل وهكذا لان العمل واحد فاذن ينتج قاعدة عمومية نذكرها فنقول

(قاعدة عمومية)

لحل جملة معادلات عددها م محتوية على مجاهيل عددها م ايضا يحذف احد المجاهيل من المعادلة الاولى مع كل من المعادلات الاخر التي عددها م — ١ على التوالي فتنتج جملة معادلات عددها م — ١ وهو عين عدد مجاهيلها ثم يحذف مجهول ثان من احدى المعادلات التي عددها م — ١ مع كل من المعادلات التي عددها م — ٢ على التوالي فتنتج جملة معادلات عددها م — ٢ وهو عين عدد مجاهيلها وهكذا يكون العمل الى أن يتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره ويوضع في احدى المعادلتين المحتويتين على المجهولين الناتجين من العمل لاستخراج المجهول الثاني ثم توضع مقادير المجاهيل التي عينت في المعادلات السابقة الناتجة من العمل لاستخراج باقي المجاهيل الاخر الى أن يتوصل الى احدى المعادلات

التى عدد مجاهيلها م وهو عين عددها فتكون قد استخرجت مقادير المجاهيل على التوالى

(٤٠) قد فرضنا فى البحث عن قاعدة حل معادلتين ذاتى مجهولين ان كلتيهما بهذه الصورة ح س + د ص = هـ اعنى أن كلتيهما لا تحتوى الا على ثلاثة حدود صحيحة احدها مشتمل على س والثانى على ص والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم فى الطرف الثانى والحدين الآخرين فى الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وجب حينئذ تحويلها الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات

وثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الطرف الثانى

وثالثا اختصار حدود س وحدود ص أو وضع س و ص مضروبين مشتركين فى الحدود المشتملة عليهما ومثل ذلك يجرى على جملة المعادلات ذوات المجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا فى المعادلات التى حلت أن جميع المجاهيل داخلة فى كل منها فان لم يكن جميعها داخلا فى كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها كحل المعادلات التامة غير انه يجب الانتباه فى انتخاب المجاهيل التى يراد حذفها ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فى اقرب وقت وللحصول على ذلك يحذف المجهول الداخل فى المعادلات بأقل عدد معادلات

٢ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٠ و

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٢ ص + ٣ ر = ١٩ و

٣ س − ٤ ص − ٢ ع + ٢ ر = ٩

مثلا يشاهد أن المجهول ر دخل فيها بعدد اقل من غيره فيجب حذف هذا المجهول من هذه المعادلات بان يحذف من المعادلتين الاخيرتين

المحتويتين عليه ليحدث معادلة مجردة منه فاذا ضمت هذه المعادلة الى المعادلتين الاولين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هى

٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٠ و

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٩ س − ١٦ ص − ٦ ع = − ١١

وحيث أن المجهول ص داخل فى هذه المعادلات بعدد اقل من غيره يحذف من المعادلة الاولى والثالثة ليتكون من حذفه معادلة مشتملة على مجهولين هما المجهولان الموجودان فى الثانية وبكتابتهما مع الثانية يحدث

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٥٩ س − ٥٠ ع = ١٢٧ و

فاذا حذف ع منهما يحدث ٧٣ س = ٢١٩

ومنها يحدث س = ٣

وبالوضع يحدث على التوالى ص = ٢ و ع = ١ و ر = ٥

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات فى حل جملة معادلات ذات درجة اولى وجملة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم فى جميع جمل المعادلات التى حلت

وقد يكون عدد المعادلات ازيد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل ازيد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات

الحالة الاولى اذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الاولى قدر عدد المجاهيل الداخلة فيها بان كان الاول م والثانى م كانت ممكنة الحل على العموم ومنتهية اعنى انها تحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل المنحصرة فيها

لانه اذا سلكت الطريقة المبينة فى (٣٩) لحل جملة معادلات توصل الى معادلة ذات مجهول واحد هكذا

م س = ك ومنها يستخرج س = ك/م فاذا وضع هذا المقدار فى احدى المعادلتين ذاتى المجهولين حدث مقدار للمجهول الثانى المنحصر فى هذه

المعادلة ومثل ذلك يجرى فى جميع مجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالى الى معادلة انتهائية هكذا س × ٠ = ء أو ٠ = ء وهى معادلة فاسدة تدل على أن الجملة المفروضة غير ممكنة الحل أعنى انه لا يمكن تحقيقها بجملة ما للمقادير المجاهيل المنحصرة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات متخالفة .

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالى الى معادلة انتهائية هكذا ٠ × س = ٠ أو ٠ = ٠ فتكون جملة المعادلات غير معينة الحل اعنى انه يمكن تحقيقها بجمل لانهائية العدد من المقادير للمجاهيل المنحصرة فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل

الحالة الثانية اذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل المنحصرة فيها بان كان عدد الاولى م + ن وعدد الثانية م فالجملة تكون على العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها م وكان لا يوجد الا جملة واحدة من مقادير المجاهيل المنحصرة فيها التى عددها م ووضعت هذه المقادير فى المعادلات الباقية التى عددها ن ولم تطابق تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع كون عدد المعادلات المحققة وهو م عين عدد المجاهيل الداخلة فيها فحينئذ تكون الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المحققة اقل من م أى من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل

الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من المجاهيل الداخلة فيها بان كان عدد الاولى م وعدد الثانية م + ن كانت الجملة على العموم غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف بالتوالى الى معادلة مشتملة على

مجاهيل عددها ن + ١ وهذه المعادلة تتحقق بجمل لانهائية العدد من المقادير فاذا وضع احد هذه الجمل فى احدى المعادلتين المشتملتين على مجاهيل عددها ن + ٢ يحدث مقدار مطابق للمجهول الباقى فى هذه المعادلة فاذن يكون لهذا المجهول مقادير غير معينة ايضا ومثل ذلك يشاهد فى جميع المجاهيل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانهائى ومع ذلك فالجملة تكون غير ممكنة الحل اذا وجد فى المعادلات التى عددها م وعدد مجاهيلها م ± ن معادلتان أو ثلاث متخالفة

امثلة ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و
٣ س + ص − ٨ ع = ١٠ و
٦ س − ٤ ص + ١٠ ع = ٢٧

ثم يحذف المجهول ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة فيوجد ٧ س − ١١ ع = ٣٤ و ٠ = ١ فالمعادلة الفاسدة التى هى ٠ = ١ تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الحادثة منهما هذه المعادلة متخالفتان ويفهم ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذى هو ٣ س − ٢ ص + ٥ ع والطرف الثانى منها ليس ضعف الطرف الثانى من الاولى الذى هو ١٤ وهذا ناشئ من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثانى ان تفرض ثلاث معادلات هكذا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و
٣ س + ص − ٨ ع = ١٠ و
٦ س − ٤ ص + ١٠ ع = ٢٨

ثم يحذف ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة

فيحدث

$٧ س - ١١ ع = ٣٤$ و $٠ = ٠$

فيظهر من المطابقة $٠ = ٠$ أن المعادلة الاولى والثالثة متداخلتان لان المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٢ فالجملة المعلومة لاثنين الا المعادلتين

$٣ س - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$ و

$٧ س - ١١ ع = ٣٤$

فيستخرج من المعادلة الاخيرة $س = \frac{٣٤ + ١١ ع}{٧}$ وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى يحدث

$ص = \frac{٤ + ٦٨ ع}{١٤}$ أو $ص = \frac{٢ + ٣٤ ع}{٧}$

وهذان المقداران يطابقان اى مقدار فرض للمجهول ع ومقادير س و ص و ع المتطابقة تحقق المعادلات المعلومة واذا يكون حل المعادلات غير معين

المثال الثالث اذا فرض

$٣ س - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$ و

$٦ س - ٤ ص + ١٠ ع = ٢٨$ و

$٩ س - ٦ ص + ١٥ ع = ٤٢$

ثم حذف المجهول ع من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة حدث متطابقتان وهذا يدل على ان الجملة المعلومة تؤل الى معادلة واحدة هى $٣ س - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$ لان المعادلة الثانية ناتجة من ضرب المعادلة الاولى فى ٢ والثالثة من ضربها فى ٣ فاذا استخرج مقدار س من المعادلة $٣ س - ٢ ص + ٥ ع = ١٤$ يحدث $س = \frac{١٤ + ٢ ص - ٥ ع}{٣}$ واذا فرضت مقادير للمجهولين ص و ع حدث مقدار المجهول س وجميع هذه المقادير تحقق المعادلات الاصلية

المثال الرابع اذا فرض

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و
٢ س + ص − ٨ ع = ١٠ و
٨ س − ٣ ص + ٢ ع = ٣٥

ثم حذف ص من الاولى والثانية ثم من الثانية والثالثة تحدث هاتان المعادلتان ٧ س − ١١ ع = ٣٤ و ١٤ س − ٢٢ ع = ٦٥
وهاتان المعادلتان متخالفتان فلو تداخلتا فى بعضهما لحدث معادلة فاسدة هى ٣ = ٠ ويفهم من ذلك ان المعادلات الاصلية متخالفة ايضا لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من الاولى مضموما اليه الطرف الاول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثانى من المعادلة الثالثة ليس مساويا لضعف الطرف الثانى من المعادلة الاولى مضافا الى الطرف الثانى من المعادلة الثانية

المثال الخامس اذا فرضنا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و
٢ س + ص − ٨ ع = ١٠ و
٨ س − ٣ ص + ٢ ع = ٣٨

يحدث بحذف ص منها معادلتان

٧ س − ١١ ع = ٣٤ و ٧ س − ١١ ع = ٣٤

وحيث أن هاتين المعادلتين متطابقتين يفهم من ذلك انه يجب استعمال المعادلتين ٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و ٧ س − ١١ ع = ٣٤ المشروحتين سابقا فى المثال الثانى
وعدم انتهاء الجملة المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم ضعف طرفى المعادلة الاولى الى طرفى المعادلة الثانية

المثال السادس اذا فرضنا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و
٦ س − ٤ ص − ٣ ع = ١٥ و
٩ س − ٦ ص − ٧ ع = ٢٠

حدث

حدث بحذف ص منهما معادلتان ٣٣ ع = ١٣ و ٢٢ ع = ٢٢
ومنهما يحدث ع = ١

ولا يجرى العمل الا على هذه المعادلة وأحدى المعادلات المفروضة الآيلتين الى المعادلتين ع = ١ و ٣ س − ٢ ص = ٩ فاذن يكون الحل غير معين نظرا الى المجاهيل س و ص و ع الذى ليس له الا مقدار واحد محدود

(مسائل من الدرجة الاولى)

(٤٣) حل المسئلة الجبرية يتركب من جزئين متغايرين احدهما وضع المسئلة بصورة معادلة تدل بطريق الاختصار على الارتباطات الكائنة بين الكميات المعلومة والمجهولة كدلالة منطوق المسئلة والثانى حل المعادلة أو المعادلات الناتجة من الوضع المذكور

والجزء الثانى من هذين الجزئين مؤسس على قواعد مطردة تقدم ذكرها فى الحالة التى تكون فيها المعادلات ذات درجة اولى واما وضع المسئلة بصورة معادلة فغير مؤسس على قواعد مطردة الا انى اذكر قاعدة عامة بها يتوصل الى وضعها بصورة معادلة وان كان تطبيق تلك القاعدة يعسر فى بعض الاحيان فاقول

(قاعدة عامة)

يجب لوضع مسئلة بصورة معادلة بعد الرمز لمجاهيلها بحروف أن تبين بواسطة العلامات الجبرية العمليات التى يلزم اجراؤها على الكميات المجهولة باعتبارها معلومة لتحقيق شروط منطوق المسئلة ونطبق هذه القاعدة على حل مسائل فنقول

(المسئلة الاولى)

(٤٤) رجل اوصى قبل موته بان نصف تركته لولده وثلثها لبنته وباقيها وهو ١٢٠٠٠ غرش للفقراء والمراد معرفة مقدار تركته غروشا وما يخص كل وارث منها

وحل ذلك أن يفرض س رمزا للتركة ومقتضى منطوق المسئلة أن تكون التركة مساوية لما يخص الولد زائدا ما يخص البنت زائدا ١٢٠٠٠ غرش أى

$$\frac{\text{س}}{٢}+\frac{\text{س}}{٣}+١٢٠٠٠=\text{س}$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيحدث

$$٣\text{س}+٢\text{س}+٧٢٠٠٠=٦\text{س}$$ اى

$$٣\text{س}+٢\text{س}-٦\text{س}=-٧٢٠٠٠$$ اى

$$-\text{س}=-٧٢٠٠٠$$ اى

$$\text{س}=٧٢٠٠٠$$

فمقدار تركته ٧٢٠٠٠ غرش يخص الولد منها النصف وهو ٣٦٠٠٠ غرش والبنت الثلث وهو ٢٤٠٠٠ غرش والفقراء الباقى وهو ١٢٠٠٠ غرش

(المسئلة الثانية)

(٤٥) ما هو العدد اللازم ضمه لحدى الكسر $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ليكون الناتج مساويا لكمية معلومة م

حل ذلك ان يفرض أن س العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$$\frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{ء}+\text{س}}=\text{م}$$ ثم يجرى حل هذه المعادلة بالقاعدة المعتادة فيحدث

$$\text{ح}+\text{س}=\text{م}\,\text{ء}+\text{م}\,\text{س}$$ ثم

$$\text{س}-\text{م}\,\text{س}=\text{م}\,\text{ء}-\text{ح}$$ ثم

$$\text{س}(١-\text{م})=\text{م}\,\text{ء}-\text{ح}$$ ثم

$$\text{س}=\frac{\text{م}\,\text{ء}-\text{ح}}{١-\text{م}}$$

(مناقشة)

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل اليها الحل بواسطة الفروض المختلفة الجارية على المعاليم

فلاختبار

فلاختبار ما يؤل اليه الناتج $\frac{\text{د م} - \text{ح}}{١ - \text{م}}$ نفرض فروض مختلفة فيه على المعاليم $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ و م فيقال

اولا اذا فرض $\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{٤}{٧}$ و $\text{م} = \frac{٢}{٣}$ بان جعل $\text{ح} = ٤$ و $\text{د} = ٧$ و $\text{م} = \frac{٢}{٣}$ فى مقدار س يؤل ذلك المقدار الى

$$\text{س} = \frac{٧ \times \frac{٢}{٣} - ٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{١٤}{٣} - ٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{١}{٣}} = ٢ \quad \text{فحينئذ} \quad \text{س} = ٢$$

لانه اذا ضم العدد ٢ الى حدى الكسر $\frac{٤}{٧}$ يصير $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ وهذا ناتج لا اشكال فيه لموافقته لمنطوق المسالة

وثانيا اذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{٥}{٨}$ و $\text{م} = \frac{١}{٢}$ أى $\text{م} = \frac{١}{٢}$ و $\text{ح} = ٥$ و $\text{د} = ٨$ فى مقدار س يؤل ذلك المقدار الى

$$\text{س} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٨ - ٥}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٤ - ٥}{\frac{١}{٢}} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}} = -٢$$

فحينئذ مقدار $\text{س} = -٢$ هو مايسمى بالحل السالب ووجه كونه سالبا انك اذا تأملت فى منطوق المسألة شاهدت انها غير ممكنة الحل لان كسر $\frac{٥}{٨}$ أكبر من $\frac{١}{٢}$ واذا ضم عدد واحد الى حدى الكسر المذكور ازداد هذا الكسر فاذن لا يمكن اضافة عدد واحد الى حدى الكسر $\frac{٥}{٨}$ ليكون الناتج مساويا للكسر $\frac{١}{٢}$ الاصغر منه فعلى هذا فيكون الحل السالب $\text{س} = -٢$ للمسئلة الجارى مناقشتها دالا على استحالة حل المسئلة فى الحالة المذكورة فينبغى حينئذ لتصليح منطوق المسئلة أن تغير فى المعادلة العمومية التى هى $\frac{\text{ح} + \text{س}}{\text{د} + \text{س}} = \text{م}$ علامة س فتصير $\frac{\text{ح} - \text{س}}{\text{د} - \text{س}} = \text{م}$ فحينئذ يكون منطوقها

ماهو العدد الذى يلزم طرحه من حدى الكسر $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ ليصير الناتج مساويا م وهو منطوق لا يختلف عن المنطوق الاصلى الا بتغيير كلمة ضم بكلمة طرح فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل ويكون لها حل عين الحل المتقدم بقطع النظر عن العلامة لانه اذا حلت المعادلة $\frac{\text{ح} - \text{س}}{\text{د} - \text{س}} = \text{م}$ ينتج دث

$س = \frac{د م - ح}{١ - م}$ واذا فرض فى هذا المقدار أن $م = \frac{١}{٢}$ و $د = ٨$
و $ح = ٥$ يحدث $س = ٢$

وثالثا اذا فرض أن $\frac{ح}{د} = \frac{٥}{٩}$ و $م = ١$ بان جعل $م = ١$
و $ح = ٥$ و $د = ٩$ فى مقدار س آل الى

$س = \frac{٩ - ٥}{١ - ١} = \frac{٤}{٠}$

ولايضاح هذا الناتج يقال من المعلوم أن الكسر يزداد متى نقص مقامه فاذا صغر المقام الى غير نهاية أوساوى صفرا كبر الكسر كذلك فاذن يكون المجهول س مقدارا غير متناه فى الكبر أعنى مقدارا لا يحد ابدا فالمسئلة تكون ايضا غير ممكنة الحل لانه اذا تأمل فى منطوق المسئلة شوهد أن الكسر اذا ضم لحديه عدد بالغا ما بلغ يزداد به غير أنه لا يصير ابدا مساويا للواحد لان فروق حديه واحدة دائما فحينئذ يكون أى مقدار بهذه الصورة $\frac{ح}{٠}$ و $\frac{١}{٠}$ و $\frac{٥}{٠}$ دالا على استحالة حل المسئلة

(تنبيه)

كل عدد غير محدود يمكن بيانه بالكسر $\frac{ح}{٠}$ أو $\frac{١}{٠}$ أو بعلامة ∞

ورابعا اذا فرض $\frac{ح}{د} = \frac{٠}{٠}$ و $م = ١$ بأن جعل $م = ١$
و $ح = ٠$ و $د = ٠$ فى مقدار س آل ذلك المقدار الى

$س = \frac{٠ - ٠}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$ ولتوضيح مقدار $س = \frac{٠}{٠}$ يقال أن مقدار س يكون مساويا لخارج قسمة صفر على صفر أى مساويا لعدد اذا ضرب فى صفر انتج صفرا وحيث أن جميع الاعداد المحدودة المضروبة فى صفر تحدث صفرا يمكن اعطاء س أى مقدار رقمى وبهذا تكون المسئلة غير معينة الحل لانه اذا تؤمل فى منطوق المسئلة يشاهد ان تساوى حدى الكسر $\frac{٠}{٠}$ لا يتغير بضم أى عدد اليهما فحينئذ يكون الناتج مساويا للواحد دائما وينتج من ذلك أن أى مقدار بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يدل على أن المسئلة غير معينة الحل

(المسئلة الثالثة)

ب ــــــــ آ ــــــــ ا

(٤٦) ساعيان ابتدأ السير من نقطتى ا و ب على مستقيم اب من الشمال الى اليمين وكان الساعى المبتدء من ب متقدما عن الآخر بالمسافة اب المرموز لها بالحرف ء وسرعته ن وسرعة الآخر م والمراد تعيين نقطتى وضعهما حين يكون بينهما مسافة من امتداد اب مساوية للبعد ءَ (والمراد بسرعة الساعيين المبينة بالرمزين م و ن البعدان اللذان يقطعهما الساعيان فى وحدة الزمن) .

فيرمز بالحرفين اَ و بَ لوضعى الساعيين حين يكون البعد الحادث بينهما مساويا للكمية ءَ ثم يرمز بالحرف س للبعد المجهول الذى هو ا اَ فالبعد ب بَ المساوى ا اَ ــ ا ب + اَ بَ يكون مبينا بالمقدار س ــ ء + ءَ

وحيث ان الزمن الذى استغرقه الساعى المبتدء من ا فى قطع البعد س عين الزمن الذى استغرقه الآخر المبتدء من ب فى قطع البعد س ــ ء + ءَ يبحث عن كل من هذين الزمنين فيقال حيث ان الساعى الاول قطع البعد م فى وحدة الزمن يقطع وحدة البعد فى الزمن $\frac{1}{م}$ ويقطع البعد س فى الزمن $\frac{س}{م}$ ومثل ذلك الساعى الثانى فانه يقطع البعد س ــ ء + ءَ فى زمن مبين بالمقدار $\frac{س - ء + ءَ}{ن}$ فاذن تحدث هذه المعادلة

$$\frac{س}{م} = \frac{س - ء + ءَ}{ن}$$ ومنها يحدث

$$ن س = م س - م ء + م ءَ$$ أو

$$م س - ن س = م ء - م ءَ$$ أو

$$س (م - ن) = م (ء - ءَ)$$ ومنها ينتج

$$س = \frac{م (ء - ءَ)}{م - ن}$$

فحينئذ يكون $س$ الذى هو عبارة عن البعد ا اَ مساويا $\frac{م(د - دَ)}{م - ن}$

واذا رمز للبعد ب بَ بالحرف $ص$ يكون $ص = \frac{م(د - دَ)}{م - ن} - د + دَ$

$$= \frac{دم - دَم - دم + دَم + دن - دَن}{م - ن} = \frac{دن - دَن}{م - ن} = \frac{ن(د - دَ)}{م - ن}$$

(مناقشة احوال المسئلة)

الحالة الاولى اذا فرض أن $د = ٠$ و $م > ن$ حدث

$$س = \frac{-دَم}{م - ن} \quad و \quad ص = \frac{-دَن}{م - ن}$$

فيكون مقدار $س$ ومقدار $ص$ سالبين لان البسطين سالبان والمقام المشترك موجب لان $م$ فيه اكبر من $ن$

ولنختبر كما فى المسئلة السابقة هل هذان المقداران يدلان على أن المسئلة ممكنة الحل فنقول

قد فرضنا فى هذه ان الساعيين قد ذهبا من نقطة واحدة بدليل أن $د = ٠$ ومن حيث ان سرعتهما مختلفة بدليل ان $م > ن$ يوجد لحظة فيها البعد الفارق بينهما مساو للكمية $دَ$ فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل

فحينئذ لا تكون المقادير السالبة ناشئة من عدم امكانية المسئلة وانما هى ناشئة من فساد فرض اجرى فى وضع المسئلة على صورة معادلة لانه قد فرض ان الساعى الذاهب من ا باق خلف الآخر مع أن الموضوع فى هذه الحالة انهما ذهبا من نقطة واحدة وان سير الساعى ا أسرع من سير الآخر ب فاذن لا يكون خلفه أبدا فلا يكون موضعا اَ و بَ المفروضين عند وضع المسئلة على صورة معادلة الموضعين الحقيقيين

فيجب لحل هذه المسئلة ووضعها على صورة معادلة أن يجعل للساعيين المحلين الحقيقيين المشغولين بهما أى أن يفرض أن اَ على يمين نقطة بَ فيكون البعد ا اَ مبينا بالحرف $س$ والبعد ب بَ مساويا $ص - د - دَ$

فتصير

فتصير المعادلة هكذا

ا ـــــــــــــــــــــــــــــــ بَ

$$\frac{س}{م} = \frac{س - ى - ىَ}{ن}$$ ومنها يستخرج

$$س = \frac{م(ى + ىَ)}{م - ن}$$ وبناء على ذلك يكون

$$ص = \frac{ن(ى + ىَ)}{م - ن}$$

فاذا فرض فى هذين المقدارين ان ى = ٠ و م > ن وهو عين الفرض الذى حدث منه المقداران السالبان المتقدمان آلا الى $س = \frac{ىم}{م - ن}$ و $ص = \frac{ىن}{م - ن}$

وهما مقداران موجبان متحدان فى المقدار المجرد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم فحينئذ يكون المقدار السالب ناتجا بعض الاحيان من فرض فاسد اجرى فى وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية اذا فرض أن ىَ = ٠ و م > ن آل المقداران العموميان الى

$$س = \frac{ىم}{م - ن} \quad و \quad ص = \frac{ىن}{م - ن}$$

ومن حيث أن م > ن يكون هذان المقداران موجبين لان بسطيهما موجبان ومقاميهما كذلك

فاذا تؤمل فى منطوق المسئلة شوهد أنها ممكنة الحل لانه بفرض ىَ صفرا يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التى يلحق فيها الساعى ا الساعى ب وان لحوقه به يكون محققا حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعى ب فحينئذ يكون المقداران الموجبان المتقدمان دالين على امكانية المسئلة

الحالة الثالثة اذا فرض أن ىَ = ٠ و م > ن ال المقداران العموميان الى

$$س = \frac{د م}{م - ن} \quad و \quad ص = \frac{د ن}{م - ن}$$

وهما مقداران سالبان لان البسطين موجبان والمقامين سالبان (حيث كان م < ن) وليسا ناتجين من فساد للغرض فى وضع المسئلة على صورة معادلة لان الحالة الخصوصية التى نحن بصددها لاتحتوى على فرض مشكوك فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التى يلحق فيها الساعى ب الساعى ا وانما يكون الحلان السالبان ناتجين من اختلال أحد شروط منطوق المسئلة لان سرعة الساعى ا مفروضة اقل من سرعة الساعى ب بدليل أن م < ن فاذن لايمكن أن يلحق الساعى ا الساعى ب

ولتصليح منطوق المسئلة يفرض فى المعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س - د + دَ}{ن}$ أن دَ = ٠ ثم تغير علامة س وبه تؤل الى $\frac{-س}{م} = \frac{-س - د}{ن}$ وبتغيير علامة الطرفين يحدث $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ ولتحويل هذه المعادلة الى منطوق مسئلة يلاحظ أن $\frac{س}{م}$ هو الزمن الذى استغرقه الساعى ا ليقطع البعد س وأن $\frac{س + د}{ن}$ هو الزمن الذى استغرقه الساعى ب ليقطع البعد س + د وحيث أن المسافة التى قطعها الساعى ا ليصل لنقطة التلاقى مع الساعى ب اصغر من المسافة الذى قطعها الساعى ب تكون نقطة التقابل على شمال النقطة ا فمعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ تتحول الى منطوق لآتى هو

ب ـــــــــــــ ا ـــــــــــــ سَ

ساعيان ابتدأ فى السير على خط ا ب من نقطتين ا و ب وسيرهما من اليمين الى الشمال لكن الساعى ا سابق للساعى ب بالبعد د وسرعة الاول م والآخر ن والمطلوب تعيين النقطة سَ من امتداد ا ب التى يلحق فيها الساعى ب الساعى ا

فاذا حلت المعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ على اسلوب ما تقدم يوجد للبعدين اسَ و بَ سَ أى س و س + د أو ص المقداران

سـ = ...   و صـ = ...

الموجبان والمحدان فى المقدار المجرد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم .

الحالة الرابعة اذا فرض أن دَ = ٠ و مْ = ﻫ فالمقداران العموميان يؤلان الى

سـ = ...   و صـ = ...

وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة الساعيين واحدة فالبعد الفارق بينهما لا يصير مساويا للصفر أبدا

الحالة الخامسة اذا فرض أن دَ = ٠ و د = ٠ و م = ﻫ فالمقداران العموميان يؤلان الى

سـ = ٠/٠   و صـ = ٠/٠

وحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن أعطاء المجهولين جميع المقادير الممكنة وهو يوافق منطوق المسئلة لان الساعيين خرجا من نقطة واحدة بدليل أن د = ٠ ولا يفترقان بدليل أن م = ﻫ فاذن يكون دَ = ٠ فى جميع نقط الخط اب

(انواع ناتجة من مناقشة المسائل التى بدرجة اولى)

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسئلتين المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير النوع الاول المقادير الموجبة والثانى المقادير السالبة والثالث المقادير التى بهذه الصورة ح/٠ والرابع المقادير التى بهذه الصورة ٠/٠

فأما المقادير الموجبة فانها تدل على امكان حل المسئلة الا فى مسائل احتيج فيها الى أن يكون مقدار المجهول عددا صحيحا ووجد مقداره كسرا موجبا فانها غير ممكنة الحل وذلك كالمسائل التى يراد فيها تعيين اساس جمع تعداديهم .

واما المقادير السالبة فانها تحدث من افروض المتناقضة الكائنة فى وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من الخلل فى معنى احد شروط منطوق المسئلة

ومتى نتج للمجهول مقدار سالب وجب اولا اختبار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك فى معناه فان كان فيه ذلك غير معنى هذا الفرض ثم تحل المسئلة الجديدة الناتجة منه فان لم يكن فيه فرض يشك فيه او كان واصلح لكن وجد مقدار سالب أو جملة مقادير للمجاهيل تحقق بالضرورة عدم امكانية بعض شروط منطوق المسئلة فاذا التصليح هذا المنطوق فى المعادلة أو المعادلات التى حلت تغير علامات المجهول او المجاهيل التى وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريبة المنطوق ما امكن من المنطوق الاصلى فينتج من ذلك مسئلة جديدة ممكنة الحل غير مخالفة للاولى الا فى معنى بعض شروط المنطوق ومقادير مجاهيلها موجبة ومقاديرها المجردة عين المقادير التى استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التى بهذه الصورة $\frac{\text{ح}}{٠}$ فانها تدل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحققه أو من أن المنطوق يشتمل على شروط اكثر من المجاهيل

واما المقادير التى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ فانها تدل على أن المسئلة غير معينة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتملا على شرط متحقق دائما أو محتويا على شروط أقل من المجاهيل

(تنبيه)

الملحوظات المتقدمة تتحقق فى جميع المسائل الصالحة للمناقشة

(مناقشة عامة للمعادلات ذوات الدرجة الاولى)

(٤٨) ولنبدء بوضع المعادلات ذوات الدرجة الاولى وجملة مجاهيل وحلها فنقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى هذه الصورة $\text{ح}\,\text{س} = \text{ء}$ التى يستخرج منها $\text{س} = \frac{\text{ء}}{\text{ح}}$

وكل

وكل معادلتين ذاتى درجة اولى ومجهولين يمكن تحويلهما الى هذه الصورة

ح س + د ص = هـ و

ح′ س + د′ ص = هـ′

فالحروف ح و د و هـ و ح′ و د′ و هـ′ رموز لكميات صحيحة معلومة ذات علامات ما فاذا حلت هاتان المعادلتان بمقتضى ما تقرر يحدث

س = (هـ د′ − د هـ′) / (ح د′ − د ح′) و ص = (ح هـ′ − هـ ح′) / (ح د′ − د ح′)

وكل ثلاث معادلات ذوات درجة اولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها الى هذه الصورة

ح س + د ص + هـ ع = و

ح′ س + د′ ص + هـ′ ع = و′

ح″ س + د″ ص + هـ″ ع = و″

فالحروف ح و د و هـ و و و ح′ و د′ و هـ′ و و′ و ح″ و د″ و هـ″ و و″ تدل على كميات صحيحة معلومة ذات علامات ما ويحدث من هذه المعادلات الثلاث بطريقة حذف المجهولين ع و ص بالكيفية السابقة

س = (و د′ هـ″ − و هـ′ د″ + هـ و′ د″ − د و′ هـ″ + د هـ′ و″ − هـ د′ و″) / (ح د′ هـ″ − ح هـ′ د″ + هـ ح′ د″ − د ح′ هـ″ + د هـ′ ح″ − هـ د′ ح″)

فاذا وضع هذا المقدار فى احدى المعادلتين ذواتى المجهولين الحادثتين من اجراء العمل توصل الى مقدار ص واذا وضع مقدارا س و ص فى احدى المعادلات الثلاث المعلومة توصل الى مقدار ع لكن يمكن استخراج مقدارى ع و ص بطريقة مختصرة وذلك بالتنبيه على أن المعادلات الثلاث لا تتغير اذا غيرت فيها الرموز

ح و حَ و حً و س وُ و دً و دَ و دُ و صَ بالرموز

دِ و دَ و دُ و ص و ح و حَ و حُ و س

فحينئذ يكون التغيير جائزا فى الارتباطات المستخرجة من المعادلات المذكورة فاذا أجرى هذا التغيير فى مقدار س يحدث

ص = وَحَهُ − وَهَحُ + هَوَحُ − حَوَهُ + حَهَوُ − هَحَوُ
÷ دَحَهُ − دَهَحُ + هَدَحُ − حَدَهُ + حَهَدُ − هَحَدُ

واذا غيرت علامات جميع حدود هذا الناتج وغير ترتيب الحدود يحدث

صَ = حَوَهُ − حَهَوُ + هَحَوُ − وَحَهُ + وَهَحُ − هَوَحُ
÷ حَدَهُ − حَهَدُ + هَحَدُ − دَحَهُ + دَهَحُ − هَدَحُ

وبتغيير مناظر للمتقدم يحدث

ع = حَدَوُ − حَوَدُ + وَحَدُ − دَحَوُ + دَوَحُ − وَدَحُ
÷ حَدَهُ − حَهَدُ + هَحَدُ − دَحَهُ + دَهَحُ − هَدَحُ

ثم يجرى هذا العمل اذا اريد استخراج مقادير أربعة مجاهيل من اربع معادلات ذات أربعة مجاهيل ومن خمس معادلات ذات خمسة مجاهيل وهلم جرا

(٤٩) بقرن النواتج المتقدمة بالمعادلات الحادثة منها تلك النواتج يحدث قاعدة ينبغى تصورها لكتابة هذه النواتج أى المقادير بدون اجراء حل المعادلات وهى أن يقال

اولا لتحصيل المقام المشترك لمقدارى س و ص المستخرجين من معادلتين ذاتى مجهولين يؤخذ مكررا ح و د من المعادلة الاولى ويركب منهما الحدان حد و دح مفصولين عن بعضهما بالعلامة — فيصيران حد — دح ثم يوضع على الحرف الاخير من كل حد هذه العلامة َ فيصيران حدَ — دحَ وهو المقام المطلوب ولتحصيل بسط مقدار أحد المجهولين بغيره كرر هذا المجهول فى المقام المشترك بالحد المعلوم بدون تغيير

العلامة

العلامة فيكون بسط مقدار س هكذا هـ حَ بـ ـ د هـَ وبسط مقدار ص هكذا ح هـَ ـ هـ حَ

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لمقادير س و ص و ع المستخرجة من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران ح و د ويركب منهما الحدان ح د و د ح ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة ـ فيصيران ح د ـ د ح ثم يدخل المكرر الثالث هـ فى آخر ووسط واول كل من الحدين المذكورين على التوالى فيحدث بادخاله فى الاول ح د هـ و ح هـ د و هـ ح د وفى الثانى د ح هـ و د هـ ح و هـ د ح ثم يجعل لكل من الحدين الاولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى الحرفين المكون له ثم تغير علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث

ح د هـ ـ ح هـ د + هـ ح د ـ د ح هـ + د هـ ح ـ هـ د ح

ثم توضع هذه العلامة ـ على ثانى حرف من كل حد وهذه ″ على ثالث حرف ايضا فيحدث المقام المشترك وهو

ح دَ هـ″ ـ ح هـَ د″ + هـ حَ د″ ـ د حَ هـ″ + د هـَ ح″ ـ هـ دَ ح″

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة يغير مكرر المجهول بالحرف المعلوم فى المقام المشترك

فاذا اريد استخراج بسط مقدار المجهول س مثلا يغير فى المقام المشترك مكرره ح بالحرف المعلوم و فيحدث

و دَ هـ″ ـ و هـَ د″ + هـ وَ د″ ـ د وَ هـ″ + د هـَ و″ ـ هـ دَ و″

واذا اريد استخراج مقادير المجاهيل من اربع معادلات ذوات اربعة مجاهيل أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجرى عليها اعمال كالاعمال المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القوانين العمومية المتقدمة فى حل معادلات

مخصوصة وذلك بان تعرفيها الحروف بمقاديرها من المعادلات المعلومة ثم تتمم عملها لكن حل المعادلات الرقمية من اول الامر أخصر

(٥١) البحث في هذه المقادير يثبت لنا انه يمكن أن يحدث من حل المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من المقادير

الاولى المقادير الموجبة والثانى المقادير السالبة والثالث المقادير التى بهذه الصورة $\frac{\text{ح}}{0}$ أو اللانهائية والرابع المقادير التى بهذه الصورة $\frac{0}{0}$ أو غير المعينة وقد علم مما مر أنه اذا كان عدد المعادلات م عين عدد المجاهيل المحتوية عليها كانت جملة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت محتوية على معادلة فاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات متداخلة فى بعضها فالحل غير معين اذا تقرر ذلك نطبقه على معادلة عمومية ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عموميتين ذاتى مجهولين فنقول

اولا اذا فرض معادلة $\text{ح}\text{س} = \text{د}$ واستخرج منها مقدار $\text{س} = \frac{\text{د}}{\text{ح}}$ وفرض فيه أيضا $\text{ح} = 0$ يحدث $\text{س} = \frac{\text{د}}{0}$ أعنى أن مقدار س على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود فى الكبر فالمعادلة لا تتحقق باى مقدار محدود لانها تصير $0 \times \text{س} = \text{د}$ وهى معادلة فاسدة لان الصفر المضروب فى عدد محدود لا يساوي أبدا مقدار د

وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$\text{ح}\text{س} + \text{د}\text{ص} = \text{ه}$ و $\text{ح}'\text{س} + \text{د}'\text{ص} = \text{ه}'$ واستخرج منهما المقداران

$$\text{س} = \frac{\text{ه}\text{د}' - \text{د}\text{ه}'}{\text{ح}\text{د}' - \text{د}\text{ح}'} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{ح}\text{ه}' - \text{ه}\text{ح}'}{\text{ح}\text{د}' - \text{د}\text{ح}'}$$

وجعل فى هذين المقدارين العموميين $\text{ح}\text{د}' - \text{د}\text{ح}' = 0$

أى $\text{ح}\text{د}' = \text{د}\text{ح}'$ و $\text{ه}\text{د}' - \text{د}\text{ه}' \neq 0$ أى $\text{ه}\text{د}' \neq \text{د}\text{ه}'$

يؤل

يؤل مقدار س = (هـ دَ − د هـَ)/(ب ...) الى ل/ج بالرمز للبسط بالحرف ل
ويكون غير محدود فى الكسر والمعادلتان المعلومتان لا تصدقان بأى مقدار محدود فرض للمجهول س وتكونان فى الحقيقة متخالفتين لانه يستخرج من الفرضين المتقدمين اللذين هما ج دَ = د جَ و هـ دَ ≠ د هـَ بالتقسيم على الحروف المعلمة ج/جَ = د/دَ و هـ/هـَ ≠ د/دَ واذا رمز للنسبتين المتساويتين اللتين هما ج/جَ و د/دَ بالحرف ك وللنسبة هـ/هـَ بالحرف ر يحدث

ج/جَ = ك و د/دَ = ك و هـ/هـَ = ر وينتج من ذلك

ج = جَ ك و د = دَ ك و هـ = هـَ ر

ولذا ابدلت فى المعادلة ج س + د ص = هـ الحروف ج و د و هـ بمقاديرها يحدث جَ ك س + دَ ك ص = ر هـَ وهى معادلة متخالفة مع الثانية لانها وان كانت عينها الا أن طرفيها قد ضربا فى كميتين مختلفتين ر و ك

وثالثا اذا كان مقدار المجهول س بهذه الصورة ج/٠ يكون مقدار ص بهذه الصورة ايضا لان مقام مقدار ص مساو للصفر فلم يبق الا البرهنة على أن بسطه ليس مساويا للصفر أو على أن ج هـَ ≠ هـ جَ فيقال حيث تقدم أن ج/جَ = د/دَ و هـ/هـَ ≠ د/دَ يحدث ج/جَ ≠ هـ/هـَ أو ج هـَ ≠ هـ جَ فاذن يكون مقدار ص بهذه الصورة ج/٠

ورابعا اذا فرض معادلة ج س = د واستخرج منها س = د/ج وجعل فى هذا المقدار العمومى ج = ٠ و د = ٠ يحدث س = ٠/٠ فعلى مقتضى ما تقدم يكون مقدار س غير معين أعنى أن

جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعلومة لانها تصير ٠ × س = ٠
وهى معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب فى عدد ما محدود يحدث حاصلا
مساويا لصفر

واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

حس + ءص = هـ و حَس + ءَص = هَ واستخرج منهما المقداران

$$\text{س} = \frac{\text{هءَ} - \text{ءهَ}}{\text{حءَ} - \text{ءحَ}} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{حهَ} - \text{هحَ}}{\text{حءَ} - \text{ءحَ}}$$

وجعل فى هذين المقدارين العموميين هءَ − ءهَ = ٠ و حءَ − ءحَ = ٠ أى هءَ = ءهَ و حءَ = ءحَ يحدث س = ٠/٠
وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان
عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين
المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من الفرضين المتقدمين هءَ = ءهَ و حءَ = ءحَ بالتقسيم على الحروف المعلمة النسب

$\frac{\text{هـ}}{\text{هَ}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءَ}}$ و $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءَ}}$ ورمز لهما بالحرف ل يحدث

$\frac{\text{هـ}}{\text{هَ}} = \text{ل}$ و $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \text{ل}$ و $\frac{\text{ء}}{\text{ءَ}} = \text{ل}$ أو هـ = هَل و ح = حَل و ء = ءَل

واذا وضع فى المعادلة حس + ءص = هـ بدل الرموز ح و ء و هـ
مقاديرها المتقدمة تؤل الى حَل س + ءَل ص = هَل وهى
معادلة لا تخالف المعادلة الثانية الا بضرب طرفيها فى ل فحينئذ المعادلتان
المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار س بهذه الصورة ٠/٠ يكون مقدار ص كذلك لان

مقام ص مساو لصفر فلم يبق الا البرهنة على أن بسطه مساو لصفر ايضا
أى على أن و هَ = هـ و فيقال حيث تقدم أن ٠ —

$\frac{هـ}{هَ} = \frac{ء}{ءَ}$ و $\frac{و}{وَ} = \frac{ء}{ءَ}$ يحدث $\frac{هـ}{هَ} = \frac{و}{وَ}$ أو هـ وَ = و هَ فاذن
يكون مقدار ص بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$

(تنبيهات)

الاول قد نتج من جعل هـ ءَ = ء هَ و و ءَ = ء وَ ان مقدارى
س و ص يكونان بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ فاذا ضم لهذين الفرضين فرض
هـ = ٠ و هَ = ٠ حدث ناتج عين الاول فمقدارا س و ص
يمتنع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل فى المعادلتين
المعلومتين هـ = ٠ و هَ = ٠ الا الى و س + ء ص = ٠
و وَ س + ءَ ص = ٠ ومنهما يحدث

$$س = \frac{-ء ص}{و} \text{ و } س = \frac{-ءَ ص}{وَ}$$

وحيث نتج من فرض و ءَ — ء وَ = ٠ أن $\frac{ء}{و} = \frac{ءَ}{وَ}$ يؤل مقدارا
س الى س = $-\frac{ء}{و}$ص ومنه يحدث $\frac{س}{ص} = -\frac{ء}{و}$ أعنى
أن النسبة بين مقدارى س و ص مساوية $\frac{-ء}{و}$ وهى نسبة
ثابتة

الثانى قد ظهر من المناقشة المتقدمة أن مقدارى المجهولين بجملة محتوية على
معادلتين ذاتى مجهولين كالمتقدمتين يكونان فى آن واحد لانهائيين أو غير
معينين لكن هذا لا يتيسر فى جملة معادلتين متشعبتين ذاتى مجهولين حتى عمر
الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يدل على ان المقدار غير
معين وقد يدل مع ذلك على وجود ضروب مشتركة بين حدى الكسر مساو
لصفر حين يفرض فرض مخصوص لهذين الحدين فاذا فرض مثلا

$س = \frac{ح^3 - د^3}{ح^2 - د^2}$ وبجعل فيه $ح = د$ آل الى $س = \frac{0}{0}$ لكن

حيث أن حدى الكسر $\frac{ح^3 - د^3}{ح^2 - د^2}$ يقبلان القسمة على $ح - د$ وأن

احدهما يساوى $(ح - د)(ح^2 + ح د + د^2)$ والآخر يساوى $(ح - د)(ح + د)$

حدث $س = \frac{(ح - د)(ح^2 + ح د + د^2)}{(ح - د)(ح + د)}$ أو $س = \frac{ح^2 + ح د + د^2}{ح + د}$

بحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن ان $ح = د$ آل مقدار س الى $\frac{3ح^2}{2ح} = \frac{3ح}{2}$

فاذن يكون مقدار س معينا

واذا فرض أيضا فى مقدار $س = \frac{ح^2 - 2ح د + د^2}{ح^2 - ح د}$ أن $ح = د$ آل

الى $س = \frac{0}{0}$ لكن حيث أن مقدار س يمكن وضعه بهذه الصورة

$س = \frac{(ح - د)^2}{ح(ح - د)}$ وان حداه قابلان للقسمة على $ح - د$ يصير

$س = \frac{ح - د}{ح}$ بحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن فى هذا المقدار أن $ح = د$ آل الى $س = \frac{0}{ح} = 0$

واذا فرض أيضا فى مقدار $س = \sqrt[2]{\frac{ح}{ح^2}}$ أن $ح = 0$ آل الى $س = \frac{0}{0}$

ومن المعلوم انه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر $\sqrt[2]{\frac{ح}{ح^2}}$ فلتعيينه

يضرب حداه فى $\sqrt{ح}$ فيحدث $س = \frac{ح}{ح\sqrt[2]{ح}}$ ثم بقسمة حدى

هذا المقدار على المضروب المشترك ح يؤل الى $س = \frac{1}{\sqrt[2]{ح}}$ ثم

بفرض $ح = 0$ يؤل هذا المقدار الى $\frac{1}{0}$

فحينئذ مقدار س المساوى $\frac{0}{0}$ يدل فى بعض الاحيان على وجود مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول ففى تحقق وجوده لزم اولا حذفه ثم اجراء الفروض التى بها يؤول حدا الكسر الى صفر حينئذ

يصير

يصير مقدار المجهول بهذه الصورة $\frac{ج}{د}$ أو $\frac{ب}{م}$ أو $\frac{ب}{ج}$ أعني انه مثبتة اوعدمي اولانهائي

(الباب الثالث)

(في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)

(في المربع والجذر التربيعي)

(٥٢) قد تقدم أن مربع الكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما مساو لها وأن الجذر التربيعي لكمية مقدار اذا رفع الى الدرجة الثانية تحصلت تلك الكمية فحينئذ يكون $ح^{٢}$ مربع $ح$ و $د^{٢}$ الجذر التربيعي للحد $د^{٤}$ ومربع $\sqrt{ح}$ هو $ح$

(٥٣) فمربع الحد $٥ ح د^{٢}$ يكون مساويا $٥ ح د^{٢} \times ٥ ح د^{٢} = ٢٥ ح^{٢} د^{٤}$

(قاعدة) لتربيع حد يربع مكرره وتضاعف اسس كل من حروفه

(قاعدة اخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع حد يكون باستخراج الجذر التربيعي لمكرره ثم تنصيف اسس كل من حروفه فحينئذ

$$\sqrt{٤٩ ح^{٤} د^{٦} هـ^{٢}} = ٧ ح^{٢} د^{٣} هـ$$

(تنبيه)

الحد يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا كاملا وكانت اسس جميع حروفه زوجية فان لم يكن كذلك فليس بكامل وجذره فيوضع تحت هذه العلامة $\sqrt{}$ والكمية الناشئة من ذلك تسمى حدا غير منطق او جذرا أصم او جذرا بدرجة ثانية وذلك نحو $\sqrt{٣٢ ح^{٥} د^{٢}}$ فاذا كانت ... محتوية على جذر منطق او كانت محتوية على جذر يمكن استخراج جذره سميت كمية جذرية

(٥٤) اختصار الجذر الاصم الذي بدرجة ثانية مؤسس على قاعدة هي أن الجذر التربيعي لحاصل ضرب يكون مساويا لحاصل ضرب الجذور التربيعية

لكل من مضاريبه فى بعضها فحينئذ

$\sqrt{حده} = \sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه}$ لان $(\sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه})^{٢}$
$= (\sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه})(\sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه}) = \sqrt{ح} \times \sqrt{د}$
$\times \sqrt{ه} \times \sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه} = \sqrt{ح} \times \sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{د}$
$\times \sqrt{ه} \times \sqrt{ه} = حده$

فاذن يكون مربع $\sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه}$ مساويا $حده$ وينتج من ذلك أن $\sqrt{ح} \times \sqrt{د} \times \sqrt{ه}$ يكون مساويا للجذر التربيعى للحد $حده$

(٥٥) لاختصار الجذر الاصم $\sqrt{٣٢ ح^{٥} د^{٣}}$ يحلل $٣٢ ح^{٥} د^{٣}$ الى مضروبين أحدهما يكون مربعا كاملا فيحدث

$\sqrt{٣٢ ح^{٥} د^{٣}} = \sqrt{١٦ ح^{٤} د^{٢} \times ٢ ح د} = \sqrt{١٦ ح^{٤} \times د^{٢}} \times \sqrt{٢ ح د} = ٤ ح^{٢} د \sqrt{٢ ح د}$

(قاعدة) لاختصار جذر أصم بدرجة ثانية يستخرج الجذر التربيعى لجميع المضاريب المربعة الموجودة تحت علامة الجذر ثم يكتب حاصل ضرب هذه الجذور على يمين علامة الجذر التى تترك تحتها المضاريب التى لم تكن مربعات كاملة ومكررا الجذر فى مقدار $٤ ح^{٢} د \sqrt{٢ ح د}$ هو الكمية $٤ ح^{٢} د$

(قاعدة) لادخال مكرر الجذر التربيعى تحت العلامة يرفع هذا المكرر الى الدرجة الثانية ثم يضرب بعد رفعه فى الكمية التى تحت علامة الجذر فحينئذ

$٤ ح^{٢} د \sqrt{٢ ح د} = \sqrt{٢ ح د \times ١٦ ح^{٤} د^{٢}} = \sqrt{٣٢ ح^{٥} د^{٣}}$

ويمكن اثبات هذه القاعدة من اول الامر بملاحظة أن $٤ ح^{٢} د = \sqrt{١٦ ح^{٤} د^{٢}}$ وتذكر ماسبق فى القاعدة المثبتة فى البند السابق فعلى مقتضى ذلك

$\sqrt{ح} \times \sqrt{د} = \sqrt{حد}$ فاذن يكون

$\sqrt{\text{٤حد}^{٢}} = \text{٢ح}\ \sqrt{\times\ \text{١٦٠حد}^{٢٤}} = \text{٢ح} \sqrt{\text{١٦حد}^{٢٤} \times \text{٢ح}} = \sqrt{\text{٣٢حد}^{٢٥}}$

(٥٦) ماتقدم فى (بند ٥٣) من قواعد التربيع واخذ الجذر التربيعى لحد لم تتعرض فيه للعلامة ولنتعرض لها فنقول

اولا ان مربع أى حد يكون موجبا دائما لانه يحصل من ضرب حدين متحدين فى العلامة

وثانيا ان الجذر التربيعى لحد موجب كحد $\text{ح}^{٢}$ يكون + ح أو ــ ح لان كلا منهما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه $\text{ح}^{٢}$ فيكون الجذر التربيعى لحد متبوعا بالعلامة + أو ــ ويوضع هذه العلامة المضاعفة ± امامه ملفوظا بها زائد او ناقص فحينئذ يكون

$$\sqrt{\text{ح}^{٢}} = \pm\ \text{ح}$$

وان الجذرين التربيعين لحد سالب كحد ــ $\text{ح}^{٢}$ لا وجود لهما لان كل كمية سالبة أو موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب فحينئذ يكون $\sqrt{-\text{ح}^{٢}}$ هو كمية تخيلية أو مقدار تخيلى والكمية الحقيقية سواء كانت موجبة أو سالبة جذرية أو غير جذرية هى ماعدا التخيلية

(٥٧) نتائج يتوصل اليها براهين مشابهة للمتقدمة

الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أى التكعيب يكعب مكرره وتثلث اسس حروفه فتكعيب حد ٧ ح٢ د٣ ه هو ٣٤٣ ح٦ د٩ ه٣

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبى لحد يستخرج الجذر التكعيبى لمكرره ويؤخذ ثلث كل من اسس حروفه فالجذر التكعيبى لحد ٢٧ ح٦ د١٢ ه هو ٣ ح٢ د٤ ه$^{\frac{١}{٣}}$

الثالثة لاختصار الجذر التكعيبى لحد يستخرج الجذر التكعيبى للمضاريب المكعبة الموجودة تحت علامة الجذر المذكور ويوضع جذرها

مكرر العلامة الجذر فحينئذ

$$\sqrt[3]{٤٠\,\text{ح}^{٤}\text{د}^{٥}} = \sqrt[3]{٨\,\text{ح}^{٣}\text{د}^{٣} \times ٥\,\text{ح}\,\text{د}^{٢}} = ٢\,\text{ح}\,\text{د}\sqrt[3]{٥\,\text{ح}\,\text{د}^{٢}}$$

الرابعة لادخال مكثر تحت علامة جذر تكعيبي يرفع هذا المكثر الى القوة الثالثة ويضرب فى الكمية الكائنة تحت العلامة المذكورة فحينئذ

$$٢\,\text{ح}\,\text{د}^{٢}\sqrt[3]{٣\,\text{ح}} = \sqrt[3]{٢٤\,\text{ح}^{٣}\text{د}^{٧}}$$

الخامسة علامة تكعيب حد تكون دائما عين علامة الحد وعلامة الجذر التكعيبي لحد تكون ايضا عين علامة الحد فحينئذ

$$\left(-\,٥\,\text{ح}\,\text{د}^{٣}\right)^{٣} = -\,١٢٥\,\text{ح}^{٣}\text{د}^{٩} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{-\,٨\,\text{ح}^{٣}\text{د}^{٦}} = -\,٢\,\text{ح}\,\text{د}^{٢}$$

(٥٨) استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود يتوقف على قاعدة تكوين مربع الكمية المذكورة وقد تقدمت قاعدة تكوين مربع كمية ذات حدين ككمية $(\text{ح} + \text{د})^{٢}$ المساوية $\text{ح}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{د} + \text{د}^{٢}$

فاذا اريد تربيع كمية ذات ثلاثة حدود ككمية $\text{ح} + \text{د} + \text{هـ}$ يرمز للحدين $\text{ح} + \text{د}$ بالحرف س فيحدث

$$(\text{ح} + \text{د} + \text{هـ})^{٢} = (\text{س} + \text{هـ})^{٢} = \text{س}^{٢} + ٢\,\text{هـ}\,\text{س} + \text{هـ}^{٢}$$

وبابدال س بمقداره يحدث

$$(\text{ح}+\text{د}+\text{هـ})^{٢} = (\text{ح}+\text{د})^{٢} + ٢\,\text{هـ}(\text{ح}+\text{د}) + \text{هـ}^{٢} = \text{ح}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{د} + \text{د}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,\text{هـ} + ٢\,\text{د}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}$$

اعنى ان مربع كمية ذات ثلاثة حدود يتركب من حاصل جمع مربعات جميع حدودها ومن ضعف حاصل ضرب حدودها مثنى

وهذه القاعدة مطردة فى كل كمية ذات حدود لانه اذا فرض انها متحققة فى كمية ذات حدود عدد حدودها م كالكمية $\text{ح} + \text{د} + \text{هـ} + \text{الخ} + \text{ل}$

تكون

تكون محققة ايضا فى كمية ذات حدود عددها يزيد عن عدد حدود الاولى بواحد كالكمية $\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل} + \text{ك}$ لانه اذا رمزنا بالحرف س للكمية الاولى $\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل}$ فتربيع الاخرى يكون $(\text{س} + \text{ك})^{2} = \text{س}^{2} + 2\,\text{س}\,\text{ك} + \text{ك}^{2}$ ثم يبدل رمز س بمقداره فيحدث

$$(\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل}+\text{ك})^{2}=(\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل})^{2}$$
$$+\,2\,\text{ك}\,(\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل})+\text{ك}^{2}$$

وحيث أن الجزء الاول $(\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل})^{2}$ من الطرف الثانى عين مربع الكمية ذات الحدود الاولى التى عدد حدودها م وان الجزء الثانى $2\,\text{ك}\,(\text{ح}+\text{ء}+\text{ه}+\cdots+\text{ل})$ من الطرف المذكور مركب من ضعف حاصل ضرب الحدود التى عددها م فى الحد الجديد اى مركب من ضعف حواصل ضرب الحدود مثنى وان الجزء الثالث وهو ك^{2} من الطرف المذكور مكون من تربيع الحد الجديد يكون مربع كمية ذات حدود عددها $\text{م} + 1$ مشتملا على حاصل جمع مربعات جميع حدودها وضعف حواصل ضرب حدودها مثنى فاذا كانت قاعدة التكوين هذه مطردة فى كمية ذات حدود تكون مطردة أيضا فى كمية ذات حدود عددها زائد عن الاولى بواحد فحيث كانت مطردة فى كمية ذات ثلاثة حدود تكون مطردة فى كمية ذات اربعة حدود وخمسة حدود وهكذا

(تنبيه)

يلفظ بهذه القاعدة بكيفية نافعة فى النتائج التى يراد استخراجها بان يقال مربع كمية ذات حدود يحتوى على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى زائدا ضعف حاصل ضرب كل من الحدين الاول والثانى فى الثالث زائدا مربع الثالث زائدا ضعف حواصل

ضرب كل من الحد الاول والثانى والثالث فى الحد الرابع زائدا مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود كالكمية

ا + ب + ح + ى + الخ يفرض أ + بَ + حَ + الخ

الجذر المطلوب ثم يفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات التنازلية لحرف كالحرف ب يجرى العمل هكذا

ا + ب + ح + ى + الخ	أ + بَ + حَ + الخ
ح + ى	٢ أ + بَ
	+ بَ

فالكمية ذات الحدود ا + ب + ح + ى + الخ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية أ + بَ + حَ + الخ فى أ + بَ + حَ + الخ

وحيث ان هذا الحاصل مرتب كمضروبيه بحسب الدرجات التنازلية للحرف

ب المذكور يكون ا حاصل ضرب أ فى أ أى مربع أ (كما فى تنبيه

بند ١٤) فبناء عليه يستخرج أ وهو اول حد من الجذر باخذ الجذر التربيعى للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يربع هذا الحد الناتج ويطرح منها فينمحى الحد الاول وهو ا ويكون الحد الثانى ب من الكمية المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر فى حده الثانى لانه اذا رمز

الى بَ + حَ + ىَ + الخ بالحرف ر يحدث ا + ب + ح + ى + الخ

$= (أ + ر)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ر + ر^{٢}$ وبطرح الكميتين المتساويتين ا و $أ^{٢}$

من كل من الطرفين ووضع ر مضروبا مشتركا يحدث

ب + ح + ى + الخ = ر (٢ أ + ر) واذا وضع بدل ر مقداره

يحدث

ب + ح + د + الخ = (بً + حً + دً + الخ) (٢ أ + بً + حً + دً + الخ)

وحيث ان الكمية ذات الحدود ب + ح + د + الخ المرتبة بحسب الدرجات التناقولية لحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية

بً + حً + دً + الخ في الكمية ٢ أ + بً + حً + دً + الخ

المرتبتين كترتيبها يكون الحد الاول ب من الاولى مساويا لحاصل ضرب

حد بً في ٢ أ من الكميتين الاخريين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني

بً من الجذر بتقسيم الحد الاول ب من الباقي الاول على ٢ أ وهو ضعف الحد الاول من الجذر وحيث علم حد بً يطرح ضعف حاصل ضرب الحد الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اي يطرح حاصل ضرب

٢ أ + بً في بً من الكمية ب + ح + د + الخ فيبقى باق بهذه

الصورة حَ + د + الخ حده الاول ضعف حاصل ضرب اول حد من

الجذر في الحد الثالث منه حً لانه اذا رمز بالحرف رَ للحدين أ + بً

وبالحرف ر للحدود الباقية من الجذر وهي حً + دً + الخ ينتج

ا + ب + ح + د + الخ = (رَ + ر)٢ = رَ٢ + ٢ رَ ر + ر٢

أو نتج حَ + د + الخ = ر (٢ رَ + ر)

أو حَ + د + الخ = (حً + دً + الخ) (٢ أ + ٢ بً + حً + دً + الخ)

وحيث أن الكمية حَ + د + الخ حاصل ضرب الكمية حً + دً + الخ

في الكمية ٢ أ + ٢ بً + حً + دً + الخ المرتبتين كترتيبها يكون ح

مساويا لحاصل ضرب حً في ٢ أ وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحد الاول من الباقى الثانى على ضعف الحد الاول من الجذر المذكور ومثل ذلك يجرى فى استخراج باقى حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة نذكرها فنقول

(قاعدة) حين لاستخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود ترتب بحسب الدرجات التصاعدية أو التنازلية لاحد حروفها ثم يستخرج الجذر التربيعى للحد ها الاول فيكون الحد الاول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحد ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يقسم الحد الثانى من الكمية المعلومة على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثانى من الجذر المطلوب فيضاعف حاصل ضرب اول حد من الجذر فى الحد الثانى منه ثم يضم الى الضعف المذكور تربيع هذا الحد ويطرح المجموع من الباقى الاول ثم يقسم الحد الاول من الباقى الجديد على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثالث من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثانى من الجذر فى الثالث ويضاف على الحاصل مربع حد الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقى الثانى ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الاول من الباقى الثالث على ضعف الحد الاول من الجذر ثم يجرى باقى العمل على اسلوب ما تقدم

ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعى للكمية ذات الحدود

٢٨ $ح^{٢}$ $د^{٢}$ ∓ ١٦ $د^{٤}$ — ١٢ $ح^{٣}$ د + ٩ $ح^{٤}$ — ١٦ ح $د^{٣}$ ترتب بحسب الدرجات التصاعدية للحرف ح ويجرى العمل هكذا

١٦ د^{٤} — ١٦ د^{٣} حـ + ٢٨ د^{٢} حـ^{٢} — ١٢ د حـ^{٣} + ٩ حـ^{٤}	٤ د^{٢} — ٢ د حـ + ٣ حـ^{٢}
— ١٦ د^{٤}	٨ د^{٢} — ٢ د حـ
الباقي الاول — ١٦ د^{٣} حـ + ٢٨ د^{٢} حـ^{٢} — ١٢ د حـ^{٣} + ٩ حـ^{٤}	— ٢ د حـ
+ ١٦ د^{٣} حـ — ٤ د^{٢} حـ^{٢}	٨ د^{٢} — ٤ د حـ + ٣ حـ^{٢}
الباقي الثاني + ٢٤ د^{٢} حـ^{٢} — ١٢ د حـ^{٣} + ٩ حـ^{٤}	+ ٣ حـ^{٢}
— ٢٤ د^{٢} حـ^{٢} + ١٢ د حـ^{٣} — ٩ حـ^{٤}	
الباقي الثالث	

بأن يستخرج الجذر التربيعي للحد ١٦ د^{٤} فيكون ٤ د^{٢} هو الحد الاول للجذر ثم يربع هذا الحد ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومة فيحدث باق — ١٦ د^{٣} حـ + ٢٨ د^{٢} حـ^{٢} — ١٢ د حـ^{٣} + ٩ حـ^{٤} يقسم حده الاول — ١٦ د^{٣} حـ على ٨ د^{٢} الذي هو ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثاني للجذر وهو — ٢ د حـ ولتحصيل ضعف حاصل ضرب الحد الاول من الجذر في الثاني وتحصيل مربع الحد الثاني يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول ثم يضرب الناتج وهو ٨ د^{٢} — ٢ د حـ في الحد الثاني — ٢ د حـ ثم يطرح الحاصل من الباقي الاول فيحدث باق ثان ٢٤ د^{٢} حـ^{٢} — ١٢ د حـ^{٣} + ٩ حـ^{٤} يقسم حده الاول ٢٤ د^{٢} حـ^{٢} على ضعف الحد الاول من الجذر ٨ د^{٢} فينتج الحد الثالث ٣ حـ^{٢} من الجذر ولتكوين ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثاني في الثالث ومربع الثالث يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول والثاني ثم يضرب الناتج ٨ د^{٢} — ٤ د حـ + ٣ حـ^{٢} في الحد الثالث ٣ حـ^{٢} ثم يطرح الحاصل من

الباقي الثاني فيكون الباقي الجديد صفرا فاذن يكون الجذر التربيعي للكمية ذات الحدود المعلومة $٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢}$

(تنابيه)

الاول يمكن ان يجرى هنا ما اجرى في القسمة بطرح كل حاصل ضرب واختصار الحدود المتشابهة من اول الامر هكذا

$$١٦ د^{٤} - ١٦ د^{٣}ح + ٢٨ د^{٢}ح^{٢} - ١٢ دح^{٣} + ٩ ح^{٤} \;\Big|\; ٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢}$$

$$+ ٢٤ د^{٢}ح^{٢} - ١٢ دح^{٣} + ٩ ح^{٤} \;\Big|\; ٨ د^{٢} - ٢ دح$$

$$- ٢ دح$$

$$٨ د^{٢} - ٤ دح + ٣ ح^{٢}$$

$$+ ٣ ح^{٢}$$

الثاني اذا غيرت علامات حدود الجذر $٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢}$ فمقداره المجرد لا يتغير لانه اذا رمز للكمية $٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢}$ بالحرف ر تكون الكمية الجديدة الحادثة بعد التغيير $-$ ر وتكون الكمية ذات الحدود المعلومة $١٦ د^{٤} - ١٦ د^{٣}ح + ٢٨ د^{٢}ح^{٢} - ١٢ دح^{٣} + ٩ ح^{٤}$ مربعا كاملا للكمية ر فتكون كذلك للكمية $-$ ر (كما في بند ٥٦) وحينئذ يكون لجذر الكمية المعلومة مقداران متميزان هما

$(٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢})$ و $-(٤ د^{٢} - ٢ دح + ٣ ح^{٢})$ والاخير ناتج من وضع علامة ناقص امام الاول

الثالث الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب حرف مربع كامل اذا كان حدها الاول مربعا كاملا وحدها الثاني قابلا للقسمة على ضعف جذر الحد الاول أو كان حدها الاخير مربعا كاملا والذي قبله قابلا للقسمة على ضعف

الحد الاخير وكان مع ذلك باقى الحد الاول من كل باقى بعد اجرى العمل قابلا للقسمة على ضعف الحد الاول من الجذر

الرابع الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب الدرجات التنازلية لحرف يعرف انها غير مربع كامل متى كان ضعف أس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر اقل من اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة لان الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة يجب ان يكون مربع الحد الاخير من الجذر فيكون اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة ضعف اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر وحيث ان ضعف اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الجذر أقل من أس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية المعلومة وان اسس حرف الترتيب فى الجذر لا تزل متناقصة لا ينتج فى الجذر حد مربعه مساو للحد الاخير من الكمية ذات الحدود المفروضة فحينئذ لا يمكن انتهاء العملية

الخامس ذات الحدين لا تكون مربعا كاملا ابدا لان مربع الحد حد ومربع ذات الحدين ثلاثة حدود ومربع ذات الحدود اربعة حدود واقل ما هنالك

(٦٠) هـ متى اريد استخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود بعضها مشتمل على حرف الترتيب باس واحد توضع هذه الكمية كوضعها فى عمل التقسيم المتقدم فى (بند ٢١) فحينئذ تؤل العمليات الجزئية المبينة بالقاعدة العمومية من البند المذكور الى استخراج الجذر التربيعى للكمية المعلومة او الى تقسيم كمية ذات حدود على أخرى

(٦١) قد سبق الكلام على استخراج الجذر التربيعى لكميات الجبرية الصحيحة ولاستخراج الجذر التربيعى للكسور تسلك الطريقة المقررة فى علم الحساب لان مربع الكسر يتكون برفع حديه للدرجة الثانية فحينئذ يستخرج جذر الكسر باستخراج الجذر التربيعى لكل من حديه

(فى حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة)

(٦٢) الجذران الاصمان يكونان متشابهين اذا اتحدت درجتهما

واتحدت الكميات الموضوعة تحت علامتهما جذرا

$٣ح\sqrt{هـ}$ و $٢ء\sqrt{هـ}$

متشابهان وكذلك جذرا $٣\sqrt[٣]{ح}$ و $٧\sqrt[٣]{ح}$

(الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها)

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فحينئذ جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون بجمع أو طرح مكرريهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقي الطرح امام الجذر المشترك فاذن يكون

$$٣\sqrt{ح}+٥\sqrt{ح}=٨\sqrt{ح} \quad و \quad ٢\sqrt{ح}-٥\sqrt{ح}=-٣\sqrt{ح}$$

$$٢ح\sqrt{ء}+٣هـ\sqrt{ء}=(٢ح+٣هـ)\sqrt{ء} \quad و \quad ٨\sqrt[٣]{ح}+٩\sqrt[٣]{ح}=١٧\sqrt[٣]{ح}$$

$$٧\sqrt[٣]{ح}-٣\sqrt[٣]{ح}=٤\sqrt[٣]{ح} \quad و \quad ح\sqrt[٣]{ء}-هـ\sqrt[٣]{ء}=(ح-هـ)\sqrt[٣]{ء}$$

ومتى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما او فاضلهما الا بالعلامة .

(في الكلام على ضرب تلك الجذور)

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدي الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامتي الجذر في بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور مثال ذلك

$\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}=\sqrt{ح\times ء}$ لان $(\sqrt{ح}\times\sqrt{ء})^{٢}=(\sqrt{ح}\times\sqrt{ء})\times$ $(\sqrt{ح}\times\sqrt{ء})=\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}\times\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}=\sqrt{ح}\times\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}\times\sqrt{ء}$ $=ح\times ء$ اعني ان مربع $\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}$ يساوي $حء$ فاذن يكون $\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}=\sqrt{ح\times ء}$ وبهذا يثبت المطلوب

ومثل هذا يجري في ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم في (بند ٥٤) من أن $\sqrt{ح\times ء}$ $=\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}$ فاذن يقال $\sqrt{ح}\times\sqrt{ء}=\sqrt{ح\times ء}$)

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران في بعضهما ويوضع حاصل ضربهما امام الجذر فحينئذ

$$٧\sqrt{ح} \times ٥\sqrt{ء} = ٧ \times ٥\sqrt{ح} \times \sqrt{ء} = ٣٥\sqrt{ح \times ء}$$ و

$$٣ح\sqrt{ء} \times ٥ح\sqrt{هـ} = ٣ح \times ٥ح \times \sqrt{ء} \times \sqrt{هـ} = ١٥ح^{٢}\sqrt{ء \times هـ}$$

(فى قسمة الجذور)

لتقسيم جذر على اخر متحدين فى الدرجة تقسم احدى الكميتين اللتين تحت علامتى الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فحينئذ

$$\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \sqrt{\frac{ح}{ء}}$$ لان $$\left(\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}}\right)^{٢} = \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} \times \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \frac{ح}{ء}$$

فاذن يكون مربع $\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \frac{ح}{ء}$ ويكون ايضا $\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \sqrt{\frac{ح}{ء}}$

وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان للجذرين مكرران يقسم احدهما على الآخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فحينئذ

$$٢\sqrt{ح} : ٥\sqrt{ء} = \frac{٢}{٥}\sqrt{\frac{ح}{ء}}$$ و $$٣ح^{٢}ء\sqrt[٣]{هـ} : حء\sqrt[٣]{ء} = ٣ح\sqrt[٣]{\frac{هـ}{ء}}$$

(٦٣) القواعد التى تقدم بيانها لا توافق حالة ضرب حدين تخيلين ولا حالة تقسيم حد حقيقى على آخر تخيلى

فعلى مقتضى التعريف يكون مربع $\sqrt{-١}$ مساويا -١ أى

$$\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$$ ومنه يحدث $$\frac{١}{\sqrt{-١}} = -\sqrt{-١}$$

فينتج من ذلك أن [illegible]

$$\sqrt{-ح} \times \sqrt{-ء} = \sqrt{ح} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{ء} \times \sqrt{-١} =$$

$$\sqrt{ح} \times \sqrt{ء}\left(\sqrt{-١}\right)^{٢} = -\sqrt{ح \times ء}$$

وان $$\frac{\sqrt{-ح}}{\sqrt{-ء}} = \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء} \times \sqrt{-١}} = \frac{١}{\sqrt{-١}} \times \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} =$$

$$-\sqrt{-١} \times \sqrt{\frac{ح}{ء}} = -\sqrt{-\frac{ح}{ء}}$$

(٦٤) اذا كان مقام الكسر اصم فمن المهم تحويله الى منطق

فاذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم لتحويله ضرب كل من حدي الكسر في مقامه فحينئذ

$$\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$$

واذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثالثة يكفي لتحويله ان يضرب كل من حدي الكسر في تربيع هذا المقام فحينئذ

$$\frac{ح}{\sqrt[٣]{د}} = \frac{ح\left(\sqrt[٣]{د}\right)^{٢}}{\sqrt[٣]{د}\times\left(\sqrt[٣]{د}\right)^{٢}} = \frac{ح\sqrt[٣]{د^{٢}}}{د}$$

واذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر بدرجة ثانية يكفي لتحويله ان يضرب حدا الكسر في كمية ذات حدين مركبة من الحد الاول من المقام ومن حده الثاني مسبوقا بعلامة مخالفة لعلامته لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كميتين في فاضلهما يساوي فاضل مربعيهما فاذن يكون

$$\frac{ح}{ع+\sqrt{ك}} = \frac{ح\left(ع-\sqrt{ك}\right)}{\left(ع+\sqrt{ك}\right)\left(ع-\sqrt{ك}\right)} = \frac{ح\left(ع-\sqrt{ك}\right)}{ع^{٢}-ك} \quad و$$

$$\frac{ح}{ع-\sqrt{ك}} = \frac{ح\left(ع+\sqrt{ك}\right)}{\left(ع-\sqrt{ك}\right)\left(ع+\sqrt{ك}\right)} = \frac{ح\left(ع+\sqrt{ك}\right)}{ع^{٢}-ك} \quad و$$

$$\frac{ح}{\sqrt{ع}+\sqrt{ك}} = \frac{ح\left(\sqrt{ع}-\sqrt{ك}\right)}{\left(\sqrt{ع}+\sqrt{ك}\right)\left(\sqrt{ع}-\sqrt{ك}\right)} = \frac{ح\left(\sqrt{ع}-\sqrt{ك}\right)}{ع-ك} \quad و$$

$$\frac{ح}{\sqrt{ع}-\sqrt{ك}} = \frac{ح\left(\sqrt{ع}+\sqrt{ك}\right)}{\left(\sqrt{ع}-\sqrt{ك}\right)\left(\sqrt{ع}+\sqrt{ك}\right)} = \frac{ح\left(\sqrt{ع}+\sqrt{ك}\right)}{ع-ك}$$

وهذه التحاويل تجري حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

مقدار

مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ يمكن اعتبار مقامه كمية ذات حدين حدها الاول $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ والثانى $-\sqrt{7}$ فاذا ضرب كل من حدى هذا الكسر فى الكمية ذات الحدين المذكورة بان غيرت علامة حدها الثانى آل

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}} \text{ الى } \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})} =$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2+2\sqrt{6}+3-7} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2(\sqrt{6}-1)}$$

وبضرب حدى هذا الناتج الاخير فى $(\sqrt{6}+1)$ يحدث

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2(\sqrt{6}-1)} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{2(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} =$$

$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{42}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2(6-1)}$$

وباختصاره يحدث

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{42}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{10}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+\sqrt{42}+\sqrt{7}}{10}$$

(٦٥) اذا اشتملت متساوية على كميات منطقة وكميات غير منطقة كانت اجزاء المنطقة فى احد الطرفين مساوية لاجزائها فى الطرف الآخر وكذا اجزاء غير المنطقة

فاذا فرضت متساوية $\text{ح}+\sqrt{\text{ء}} = \text{ه}+\sqrt{\text{و}}$ وفرض أن $\sqrt{\text{ء}}$ و $\sqrt{\text{و}}$ غير منطقين وأن ح و ه منطقين كان $\text{ح} = \text{ه}$ و $\sqrt{\text{ء}} = \sqrt{\text{و}}$ لانه بتحويل ح الى الطرف الثانى من المتساوية $\text{ح}+\sqrt{\text{ء}} = \text{ه}+\sqrt{\text{و}}$ تصير $\sqrt{\text{ء}} = \text{ه}+\sqrt{\text{و}}-\text{ح}$

واذا فرض أن $ه - ح = م$ ورفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية حدث

$$د = م^{٢} + و + ٢م\sqrt{و} \quad \text{أو}$$

$$د - م^{٢} - و = ٢م\sqrt{و}$$

وهى متساوية مستحيلة لان الكمية المنطقة $د - م^{٢} - و$ لاتكون مساوية للكمية غير المنطقة $٢م\sqrt{و}$ الا اذا فرض $م = ٠$

وحيث أن $م = ه - ح$ يكون $ه = ح$ فحيث كان $ه = ح$ ينتج من المتساوية $ح + \sqrt{د} = ه + \sqrt{و}$ أن $\sqrt{و} = \sqrt{د}$ فحينئذ يكون

$$ح = ه \quad و \quad \sqrt{د} = \sqrt{و}$$

(٦٦) كل مقدار بهذه الصورة $\sqrt{ح} + \sqrt{د}$ يمكن تحويله بالسهولة الى مقدار بهذه الصورة $\sqrt{\frac{ح}{أ} + \sqrt{\frac{د}{أ}}}$ بحيث تكون كميات ح و د و أ و أ الداخلة فى هذين المقدارين منطقة

وللوصول الى ذلك ترفع الكمية $\sqrt{ح} + \sqrt{د}$ الى الدرجة الثانية فتصير

$(\sqrt{ح} + \sqrt{د})^{٢} = ح + د + ٢\sqrt{حد}$ ثم يستخرج الجذر التربيعى لكل من الطرفين فيحدث

$$\sqrt{ح} + \sqrt{د} = \sqrt{ح + د + ٢\sqrt{حد}} = \sqrt{ح + د + \sqrt{٤حد}}$$

واذا فرض أن $ح + د = \frac{ح}{أ}$ و $٤حد = \frac{د}{أ}$ يحدث

$$\sqrt{ح} + \sqrt{د} = \sqrt{\frac{ح}{أ} + \sqrt{\frac{د}{أ}}}$$

وبالعكس يمكن تحويل مقدار $\sqrt{\frac{ح}{أ} + \sqrt{\frac{د}{أ}}}$ الى آخر بهذه الصورة

$\sqrt{ح}$

$\sqrt{\text{ح}} + \sqrt{\text{د}}$ بحيث تكون كيات ح و د و ح_1 و د_1 جذرية

والوصول الى ذلك يربع كل من طرفى المتساوية

$\sqrt{\text{ح}} + \sqrt{\text{د}} = \sqrt{\text{ح}_1 + \sqrt{\text{د}_1}}$ فيحدث

$\text{ح} + \text{د} + 2\sqrt{\text{حد}} = \text{ح}_1 + \sqrt{\text{د}_1}$ وبمقتضى ما تقدم فى (بند ٦٥) يحدث

$\text{ح} + \text{د} = \text{ح}_1$ ..... (١) و $4\,\text{حد} = \text{د}_1$ ...... (٢)

واذا ربع كل من طرفى المتساوية (١) وطرح من الناتج المتساوية (٢) يحدث $\text{ح}^2 + \text{د}^2 - 2\,\text{حد} = \text{ح}_1^2 - \text{د}_1$ ومنها يحدث

$\text{ح} - \text{د} = \sqrt{\text{ح}_1^2 - \text{د}_1}$ .... (٣)

ويحدث أيضا من المتساويتين (١) و (٣)

$\text{ح} = \frac{1}{2}\text{ح}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}_1^2 - \text{د}_1}$ و $\text{د} = \frac{1}{2}\text{ح}_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}_1^2 - \text{د}_1}$

وحيث فرض أن ح و د منطقان يلزم أن يكون $\text{ح}_1^2 - \text{د}_1$ مربعا كاملا فاذا رمز لهذا المربع بالحرف هـ^2 يحدث

$\text{ح} = \frac{\text{ح}_1 + \text{هـ}}{2}$ .... (٤) و $\text{د} = \frac{\text{ح}_1 - \text{هـ}}{2}$ .... (٥)

أعنى انه يلزم لامكان تحويل مقدار $\sqrt{\text{ح}_1 + \sqrt{\text{د}_1}}$ الى مقدار بهذه الصورة $\sqrt{\text{ح}} + \sqrt{\text{د}}$ أن يكون $\text{ح}_1^2 - \text{د}_1$ مربعا كاملا فاذا رمز لهذا المربع بالحرف هـ^2 يعلم المقداران ح و د من القانونين

$$\text{ح} = \frac{\text{ح}_1 + \text{هـ}}{2} \quad \text{و} \quad \text{د} = \frac{\text{ح}_1 - \text{هـ}}{2}$$

(تنبيه)

قد فرض فى المتساوية $\sqrt{ح} + \sqrt{ء} = \sqrt{ح_١ + \sqrt{ء_١}}$ ان الجذور الاربعة موجبة وحيث تقدم ان $ح + ء + ٢\sqrt{حء} = ح_١ + \sqrt{ء_١}$ ينتج منه ان $٢\sqrt{حء} = \sqrt{ء_١}$ فاذن يلزم ان تكون علامتا الجذرين $٢\sqrt{حء}$ و $\sqrt{ء_١}$ متحدتين فتكون علامة $\sqrt{٤حء}$ موجبة اذا كانت علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{ء}$ متحدتين وتكون علامته سالبة اذا كانت علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{ء}$ متخالفتين اعنى اذا كانت علامة $\sqrt{ء_١}$ موجبة تكون علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{ء}$ متحدتين واذا كانت علامة $\sqrt{ء_١}$ سالبة تكون علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{ء}$ متخالفتين

ولنطبق ما ذكرناه على مثالين فنقول

المثال الاول اذا اريد تحويل المقدار $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}}$ الى جذرين منفردين يكون بمقتضى ما تقدم $ح_١^٢ = ٤٩$ و $ء_١ = ٤٠$ ومنه يحدث $ح_١^٢ - ء_١ = ٩$ وحيث أن $ح_١^٢ - ء_١ = ٩$ مربع كامل يمكن تحويل مقدار $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}}$ الى مقدار بهذه الصورة $\sqrt{ح} + \sqrt{ء}$ وحيث تقدم أن $ح_١^٢ - ء_١ = هـ^٢$ يكون $هـ^٢ = ٩$ أو $هـ = ٣$ ويكون ايضا $ح = \frac{٣+٧}{٢} = ٥$ و $ء = \frac{٧-٣}{٢} = ٢$ فاذن يكون $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ وتكون علامتا $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٢}$ متحدتين لان $\sqrt{٤٠}$ له علامة +.

المثال الثانى اذا فرض أن المراد تحويل المقدار $\sqrt{٣ - ٢\sqrt{٢}}$ الى ما ذكر يكون بمقتضى ما تقدم $ح_١^٢ = ٩$ و $ء_١ = ٨$ و $ح_١^٢ - ء_١ = ١$

اعنى

أعنى ه = ١ فاذن يكون ج = $\frac{٣+١}{٢}$ = ٢ و د = $\frac{٣-١}{٢}$ = ١
فحينئذ يكون

$\sqrt{٣-٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢} - \sqrt{١} = \sqrt{٢} - ١$ أعنى
انه يلزم أن تكون علامتا $\sqrt{٢}$ و ـ ١ متخالفتين لان الحد
$٢\sqrt{٢}$ له علامة ناقص

(فى المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)*

(فى المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد)

(٦٧) المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هى المحتوية على
مجهول أسه الاعظم مساو ٢ وتنقسم المعادلة المذكورة الى معادلة تامة
وغير تامة

فغير التامة هى المحتوية على المجهول بدرجة ثانية فقط كمعادلة جس٢ = د
وتسمى معادلة ذات حدين

والتامة هى المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية كمعادلة

جس٢ + دس + ه = ٠ وتسمى معادلة ذات ثلاثة حدود

(فى المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية)

(٦٨) كل معادلة غير تامة متشعبة كانت أو غير متشعبة يمكن تحويلها الى
معادلة بهذه الصورة جس٢ = د فيها رمزا ج و د يدلان على
كميتين صحيحتين سالبتين أو موجبتين ومنها يستخرج س٢ = $\frac{د}{ج}$ أو س
= ± $\sqrt{\frac{د}{ج}}$ بملاحظة أن الجذر التربيعى لكمية يكون مسبوقا بعلامتى
± فاذا فرض أن م رمز لكمر $\frac{د}{ج}$ يكون للمجهول س مقداران
متساويان ومتخالفان فى العلامة أى

س = + $\sqrt{م}$ و س = ـ $\sqrt{م}$

(تنبيه)

لايكون جذر الطرف الثاني مسبوقا بعلامتي $\pm$ وحده بل جذر الطرف الاول كذلك فاذن يحدث $\pm \text{س} = \pm \sqrt{\text{م}}$ ومنها يحدث أربعة مقادير للمجهول س وهى

$$+\text{س} = +\sqrt{\text{م}} \quad \text{و} \quad +\text{س} = -\sqrt{\text{م}} \quad \text{و}$$
$$-\text{س} = +\sqrt{\text{م}} \quad \text{و} \quad -\text{س} = -\sqrt{\text{م}}$$

فاذا غيرت علامتا المقدارين الاخيرين صارا متطابقين مع الاولين الحادثين من مقداري الجذر التربيعي المسبوق بعلامتي $\pm$ للطرف الثاني فاذن لايكون للمجهول س الا مقداران حقيقيان

وتحقيق أن س له مقداران فقط ان يوضع بدل م المقدار $(\sqrt{\text{م}})^2$ عوضا عنه في المعادلة $\text{س}^2 = \frac{\text{ك}}{\text{ح}} = \text{م}$ فتؤل الى $\text{س}^2 - (\sqrt{\text{م}})^2 = ٠$

وحيث أن $\text{س}^2 - (\sqrt{\text{م}})^2 = (\text{س} + \sqrt{\text{م}})(\text{س} - \sqrt{\text{م}})$

يحدث $(\text{س} + \sqrt{\text{م}})(\text{س} - \sqrt{\text{م}}) = ٠$

ولاجل أن يكون الطرف الاول الذي هو حاصل ضرب مساويا لصفر يلزم أن يكون كل من مضروبي الطرف الاول مساويا لصفر اذا تقرر ذلك توصل الى

$$\text{س} + \sqrt{\text{م}} = ٠ \quad \text{و} \quad \text{س} - \sqrt{\text{م}} = ٠$$ ومنهما يحدث

$$\text{س} = -\sqrt{\text{م}} \quad \text{و} \quad \text{س} = +\sqrt{\text{م}}$$

فالمجهول الداخل في المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يكون له مقداران فقط يسميان جذري المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين ومتخالفين في العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون م موجبا أو سالبا

(٦٩) ولنطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول

المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

$$\frac{\text{س}+٢}{\text{س}} = \frac{٣\text{س}}{٤\text{س}-٨}$$

فبحذف المقامات يحدث $٤\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٨\text{س} - ١٦ = ٣\text{س}^٢$
ثم تحول الكميات المعلومة الى الطرف الثانى والمجهولة الى الاول وتختصر الحدود المتشابهة فيحدث

$$\text{س}^٢ = ١٦ \quad \text{أو} \quad \text{س} = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$$

فاذا رمز بالحرفين سَ و سُ لجذرى المعادلة يكون

$$\text{سَ} = +٤ \quad \text{و} \quad \text{سُ} = -٤$$

المثال الثانى أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة $\frac{\text{ح}\text{س} - \text{س}^٢}{\text{ح}} = \text{ح} + \text{س}$
فباجراء العمل كما تقدم فى المثال الاول يحدث

$$\text{ح}\text{س} - \text{س}^٢ = \text{ح}^٢ + \text{ح}\text{س} \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^٢ = -\text{ح}^٢ \quad \text{أو}$$

$$\text{س} = \pm\sqrt{-\text{ح}^٢} = \pm \text{ح}\sqrt{-١}$$

أعنى أن جذرى المعادلة يكونان تخيليين

(فى المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية)

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثانية يمكن ايلولتها الى هذه الصورة

$\text{ح}\text{س}^٢ + \text{ء}\text{س} + \text{هـ} = ٠$ التى فيها الرموز ح و ء و هـ تدل على كميات موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفى هذه المعادلة على ح تصير $\text{س}^٢ + \frac{\text{ء}\text{س}}{\text{ح}} + \frac{\text{هـ}}{\text{ح}} = ٠$

واذا فرض أن $\frac{\text{ء}}{\text{ح}} = \text{ع}$ و $\frac{\text{هـ}}{\text{ح}} = \text{ل}$ يحدث

$$\text{س}^٢ + \text{ع}\text{س} + \text{ل} = ٠$$

ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة $س^٢ + ٢ ح س + ح^٢ = ء$ أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية ذات الحدين $س + ح$ امكن تحويلها الى معادلة بدرجة اولى بان يؤخذ الجذر التربيعى لكل من طرفيها فحينئذ يسهل حلها

ولتحويل المعادلة $س^٢ + ع س + ك = ٠$ الى الصورة المتقدمة يحول ك الى الطرف الثانى فتؤول الى $س^٢ + ع س = - ك$ ثم يعتبر $س^٢ + ع س$ حدين لمربع كمية ذات حدين فيكون $س^٢$ مربع الحد الاول لها و $ع س$ ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا $\frac{ع س}{٢ س} = \frac{ع}{٢}$ فاذا ضم الى طرفى المعادلة $س^٢ + ع س = - ك$ مربع الحد $\frac{ع}{٢}$ تحدث المعادلة

$$س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤} = \frac{ع^٢}{٤} - ك$$

التى طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين $س + \frac{ع}{٢}$ فاذا استخرج جذر طرفيها يحدث

$$س + \frac{ع}{٢} = \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$ ومنها يحدث

$$س = - \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$

وينتج من هذا القانون الاخير ان للمجهول س مقدارين فاذا رمز لهما بالرمزين $سَ$ و $سً$ يحدث

$$سَ = - \frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك} \quad و \quad سً = - \frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$

وينتج ايضا من القانون المتقدم انه متى حولت المعادلة التامة ذات الدرجة

الثانية

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ع س \pm ك^٢ = ٠$$

يكون مقدار المجهول مساويا لنصف مكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثانى الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

(تنبيه)

قد وضع فى اخذ الجذر التربيعى لطرفى المعادلة

$س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤} = \frac{ع^٢}{٤} - ك^٢$ امام الجذر التربيعى للطرف الثانى العلامة المضاعفة $\pm$ مع انه ينبغى وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا لان $س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤}$ مربع الكمية ذات الحدين $- س - \frac{ع}{٢}$ ايضا لكن اذا وضعت العلامة $-$ امام جذر الطرف الاول فالجذران الناتجان للمجهول س يصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحادثين من حين وضع علامة $+$ فاذن يكتفى بوضع العلامة المضاعفة $\pm$ امام الجذر التربيعى للطرف الثانى فقط

(تمرينات على حل المعادلات)

(٧١) اذا اريد حل المعادلة الرقمية التى هى $\frac{٥ س^٢}{٦} - \frac{س}{٢} + \frac{٣}{٤} =$ $٨ - \frac{٢ س}{٣} - س^٢ + \frac{٢٧٣}{١٢}$ تحول اولا هذه المعادلة الى اخرى بهذه الصورة $س^٢ + ع س + ك^٢ = ٠$ ويتوصل الى ذلك بحذف المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ س + ٩ = ٩٦ - ٨ س - ١٢ س^٢ + ٢٧٣$$

وتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرف الاول تؤول الى

$$٢٢\,س^{٢} + ٢\,س - ٣٦٠ = ٠ \quad \text{أو} \quad س^{٢} + \frac{٢\,س}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢} = ٠$$

وبتطبيق القانون

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك}$$ على المعادلة المذكورة يحدث

$$س = -\frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢} + \frac{٣٦٠}{٢٢}}$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة $س^{٢} + \frac{٢\,س}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢}$ من اول الامر بان يحول $-\frac{٣٦٠}{٢٢}$ الى الطرف الثانى ويضم لكل من طرفيها $\left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢}$ وهو مربع نصف مكرر المجهول س فيحدث

$$س^{٢} + \frac{٢\,س}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢} = \frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢}$$

ثم بأخذ الجذر التربيعى لكل من طرفيها يحدث

$$س + \frac{١}{٢٢} = \pm \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢}}$$ وبالنتيجة

$$س = -\frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^{٢}}$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الموجودة تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حدّا الكسر $\frac{٣٦٠}{٢٢}$ فى ٢٢ ثم يضم الكسران الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضهما

فيحدث $$س = -\frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{٣٦٠ \times ٢٢ + ١}{(٢٢)^{٢}}}$$

فاذا اجريت عملية حساب $٣٦٠ \times ٢٢ + ١$ واخرج العدد $(٢٢)^{٢}$ من تحت علامة الجذر ولوحظ أن العدد ٢٢ هو المقام المشترك يحدث

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{٧٩٢١}}{٢٢}$$

وحيث أن الجذر التربيعى للعدد ٧٩٢١ هو ٨٩ يكون

س =

$س = \frac{-١ \pm ٨٩}{٢٢}$ واذا وضع كل من جذرى المجهول س على حدته يحدث

$سَ = \frac{-١+٨٩}{٢٢} = \frac{٨٨}{٢٢} = ٤$ و

$سً = \frac{-١-٨٩}{٢٢} = \frac{-٩٠}{٢٢} = \frac{-٤٥}{١١}$

(فى المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية)

(٧٢) قد تقدم فى حل معادلة تامة ذات درجة ثانية ان كل معادلة من هذا القبيل لها جذران وبرهان ذلك ايضا ان يقال كل معادلة تامة ذات درجة ثانية كالمعادلة $س^٢ + ح س + ك = ٠$ يمكن وضعها بهذه الصورة $س^٢ + ح س + \frac{ح^٢}{٤} = \frac{ح^٢}{٤} - ك$ بتحويل الحد المعلوم ك الى الطرف الثانى واضافة $\frac{ح^٢}{٤}$ الى كل من الطرفين فاذا لوحظ ان الطرف الاول $س^٢ + ح س + \frac{ح^٢}{٤}$ مساو $\left(س + \frac{ح}{٢}\right)^٢$ وان الطرف الثانى $\frac{ح^٢}{٤} - ك$ مساو $\left(\sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)^٢$ ووضع هذان المقداران فى المعادلة المتقدمة وحول ما كان فى الطرف الثانى الى الاول حدث

$$\left(س + \frac{ح}{٢}\right)^٢ - \left(\sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)^٢ = ٠$$

وحيث أن الطرف الاول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب مجموع جذريهما فى فاضلهما اى مساويا

$$\left(س + \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)\left(س + \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right) = ٠$$

فحيث أن الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساو لطرف الثانى أى الصفر يلزم أن يكون احد مضروبيه مساويا لصفر وحيث انه محتو على مضروبين تكون المعادلة محققة بفرض كليهما مساويا لصفر أى

$$\text{س} + \frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}} = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س} + \frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}} = ٠$$

ويستخرج من ذلك مقدارا المجهول س وهما عينا المقدارين المعلومين سابقا وبهذا يثبت ان كل معادلة تامة بدرجة ثانية لها جذران فقط

(تنبيه)

ينتج من مقارنة المعادلة

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}}\right)\left(\text{س} + \frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}}\right) = ٠$$

بجذرى المجهول س أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه الصورة $\text{س}^{٢} + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك} = ٠$ يكون مركبا من حاصل ضرب كميتين كلتاهما ذات حدين ومحتوية على المجهول س بدرجة اولى فالحدان الأولان منهما يكونان س والاخيران منهما يكونان جذرى س مأخوذين بعلامتين مخالفتين

وينتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعد معرفة جذريها هى انه لتركيب معادلة بدرجة ثانية بعد معرفة جذريها ٢ و −٥ يجعل حاصل ضرب الكميتين ذاتى الحدين $\text{س} - ٢$ و $\text{س} + ٥$ مساويا الصفر فيحدث $\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٠ = ٠$ وهى المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و −٥ وهما جذراها

(٧٣) حيث أن كل جذرى معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$\text{سَ} = -\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}} \quad \text{و} \quad \text{سً} = -\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} - \text{ك}}$$

يحدث بجمعهما على بعضهما

$$س' + س'' = - \frac{ح}{٢} - \frac{ح}{٢} = - ح$$

أعنى أن حاصل جمع جذرى معادلة بدرجة ثانية مساو لمكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته

واذا ضرب الجذران المذكوران فى بعضهما يحدث

$$س' س'' = \left(-\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)\left(-\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)$$

$$= \left(-\frac{ح}{٢}\right)^٢ - \left(\sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)^٢ = \frac{ح^٢}{٤} - \frac{ح^٢}{٤} + ك = ك$$

اعنى ان حاصل ضرب جذرى معادلة بدرجة ثانية يساوى حدها المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته ان كان فى الطرف الثانى اوبعلامته ان كان فى الطرف الاول

(تنبيه)

ينتج من هاتين الخاصيتين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها فاذا فرض مثلا أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها ٢ و − ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويا ٣ وحاصل ضربهما مساويا − ١٠ وتكون المعادلة المطلوبة $س^٢ + ٣ س - ١٠ = ٠$

(٧٤) جذرا المجهول س المساويان $-\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}$ والمحتويان على علامة الجذر يكونان تخيليين متى كانت الكمية $\frac{ح^٢}{٤} - ك$ الموضوعة تحت علامة الجذر سالبة وحيث أن $\frac{ح^٢}{٤}$ مربع كامل تكون علامته موجبة دائما وعلامة $\frac{ح^٢}{٤} - ك$ لا تتعلق حينئذ الا بعلامة ك من معادلة $س^٢ + ح س + ك = ٠$ وبمقدارى ح و ك

فاذا كان ك اصغر من صفر أو سالبا يكون − ك موجبا ويكون
أيضا $\frac{ح^{٢}}{٤} - ك$ موجبا ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين
واذا كان ك مساويا للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر الى
$\frac{ح^{٢}}{٤}$ وكان الجذران حينئذ حقيقيين
واذا كان ك موجبا يكون − ك سالبا وتكون الكمية التى تحت
علامة الجذر $\frac{ح^{٢}}{٤} - ك$ مركبة من كمية موجبة وكمية سالبة فعلامة
الجذر تتعلق بالمقادير المنسوبة لهاتين الكميتين فاذا كان ك أصغر من $\frac{ح^{٢}}{٤}$
كانت الكمية ذات الحدين $\frac{ح^{٢}}{٤} - ك$ موجبة والجذران حقيقيين غير
متساويين
واذا كان $ك = \frac{ح^{٢}}{٤}$ كانت الكمية ذات الحدين التى تحت علامة الجذر
مساوية لصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين واذا كان ك أكبر من
$\frac{ح^{٢}}{٤}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{ح^{٢}}{٤} - ك$ سالبة والجذران تخيليين وهاك
جدولا لنتائج هذه المناقشة

اذا كان:
- $ك < ٠$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
- $ك = ٠$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
- $ك > ٠$ وكان:
  - $ك < \frac{ح^{٢}}{٤}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
  - $ك = \frac{ح^{٢}}{٤}$ يكون الجذران حقيقيين ومتساويين
  - $ك > \frac{ح^{٢}}{٤}$ يكون الجذران تخيليين

(٧٥) يمكن من اول الامر ادراك علامتى جذرى معادلة بهذه الصورة
$س^{٢} + ح س + ك = ٠$ وذلك مؤسس على الخاصيتين

س + س

سَ سُ = ك و سَ + سُ = − ح وبيان ذلك أن يقال

اولا اذا كان ك أصغر من صفر أو سالبا تكون علامتا الجذرين مخالفتين لان حاصل ضربهما سالب وعلامة اكبرهما مخالفة لعلامة ح حيث كان حاصل جمعهما مساويا − ح

وثانيا اذا كان ك مساويا لصفر يكون أحد الجذرين مساويا لصفر لأن حاصل ضربهما عدم ويكون الآخر مساويا للمكرر ح بعلامة مخالفة لعلامته

وثالثا اذا كان ك اكبر من صفر وموجبا يكون للجذرين علامة واحدة حيث كان حاصل ضربهما موجبا وتكون علامتاهما مخالفة أيضا لعلامة ح ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$سَ = -\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك} \quad و \quad سُ = -\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك}$$

وهاك جدولا يحتوى على النتائج الحادثة من المناقشة المتقدمة

اذا كان:

- ك < ٠ تكون علامتا الجذرين مختلفتين لكن ان كان { ح < ٠ كان اكبرهما موجبا / ح > ٠ كان اكبرهما سالبا }
- ك = ٠ يكون احد الجذرين صفرا والآخر مساويا − ح
- ك > ٠ تكون علامتا الجذرين متحدتين لكن ان كان { ح < ٠ يكون الجذران موجبين / ح > ٠ يكون الجذران سالبين }

(٧٦) لم يبق علينا الآن تمحن بعض حالات خاصة فنقول

اولا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التى كان فيها ك اكبر من صفر ومساويا $\frac{ح^{٢}}{٤}$ أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك}$$ لكن يمكن البرهنة على ذلك من وقت الامر

بان يوضع في المعادلة $سٌ^{٢} + ح س + ك = ٠$ بدل ك مقداره

فتصير $س^2 + ح\,س + \frac{ح^2}{٤} = ٠$ وهى معادلة يمكن وضعها بهذه الصورة $\left(س + \frac{ح}{٢}\right)^2 = ٠$ ومنها يحدث

$$\left(س + \frac{ح}{٢}\right)\left(س + \frac{ح}{٢}\right) = ٠$$

وهى معادلة تتحقق بالفرضين $س + \frac{ح}{٢} = ٠$ و $س + \frac{ح}{٢} = ٠$ المتطابقين ومنها يستخرج الجذران $س = -\frac{ح}{٢}$ و $س = -\frac{ح}{٢}$ المتساويان

وثانيا قد شوهد فيما تقدم فى الحالة التى كان فيها $ك = ٠$ أن أحد الجذرين مساو صفرا والاخر مساو $-ح$ ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - ك}$$ او من الارتباطين

$سَ\,سً = ك$ و $سَ + سً = -ح$ لكن يمكن استنتاج ذلك من اول الامر من المعادلة $س^2 + ح\,س + ك = ٠$ لانه اذا فرض فيها $ك = ٠$ تؤول الى $س^2 + ح\,س = ٠$ واذا وضع فيها $س$ مضروبا مشتركا آلت الى $س\,(س + ح) = ٠$ وهى معادلة تتحقق بالفرضين $س = ٠$ و $س + ح = ٠$ اللذين يستخرج منهما $س = ٠$ و $س = -ح$

وثالثا اذا فرض $ح = ٠$ فى القانون $س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - ك}$ آل الى $س = \pm\sqrt{-ك}$ اعنى أن جذرى المجهول $س$ يكونان متساويين ومخالفين فى العلامة لكن يمكن استنتاج ذلك من المعادلة $س^2 + ح\,س + ك = ٠$ التى تؤول فى هذه الحالة الى معادلة غير تامة بهذه الصورة

$س^2 + ك = ٠$ ومنها يستخرج $س = \pm\sqrt{-ك}$

ورابعا

ورابعا اذا فرض أن $\text{ك} = ٠$ و $\text{ح} = ٠$ فى ان واحد فى القانون

$$\text{س} = -\frac{\text{ح}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}$$ أو فى الارتباطين

$\text{سَ} + \text{سً} = -\text{ح}$ و $\text{سَ}\,\text{سً} = \text{ك}$ او فى المعادلة

$\text{س}^٢ + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك} = ٠$ يكون جذرا المجهول س مساويين لصفر

(٧٧) ولنطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية فنقول

المثال الاول اذا فرضت معادلة $٣\,\text{س}^٢ + \text{س} - ٢ = ٠$ وقسم طرفاها على مكرر $\text{س}^٢$ التالى

$$\text{س}^٢ + \frac{\text{س}}{٣} - \frac{٢}{٣} = ٠$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين وبناء عليه يكونان متخالفين فى العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا وايضا حيث كان مكرر الحد الثانى موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا وبناء عليه يكون اكبرهما سالبا فحينئذ جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتخالفى العلامة واكبرهما سالبا

ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول س من المعادلة المعلومة فيحدث

$$\text{س} = -\frac{١}{٦} \pm \sqrt{\frac{١}{٣٦} + \frac{٢}{٣}} = \frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٢٤}}{٦} = \frac{-١ \pm \sqrt{٢٥}}{٦}$$

$= \frac{-١ \pm ٥}{٦}$ ومنه يستخرج

$$\text{سَ} = \frac{-١ + ٥}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} \quad \text{و} \quad \text{سً} = \frac{-١ - ٥}{٦} = -١$$

المثال الثانى اذا فرضت معادلة $٦ س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$

وقسمت حدودها على ٦ آلت الى $س^{٢} - \frac{٥س}{٦} + \frac{١}{٦} = ٠$

وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم مقارنته بمربع نصف مكرر الحد الثانى أعنى مربع $\frac{٥}{١٢}$ ومن حيث أن مربع $\frac{٥}{١٢}$ يساوى $\frac{٢٥}{١٤٤}$ يلزم مقارنة كسرى $\frac{٢٥}{١٤٤}$ و $\frac{١}{٦}$ بأن يضرب حدا الكسر $\frac{١}{٦}$ فى ٢٤ فيؤول الى $\frac{٢٤}{١٤٤}$ وحيث أن الكسر $\frac{٢٤}{١٤٤}$ أصغر من $\frac{٢٥}{١٤٤}$ أى ان الحد المعلوم أصغر من مربع نصف مكرر الحد الثانى يكون جذرا المعادلة حقيقيين غير متساويين ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو $\frac{١}{٦}$ يكونان متحدين فى العلامة ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو $\frac{٥}{٦}$ موجب ايضا يكونان موجبين فحينئذ يكون الجذران حقيقيين موجبين وغير متساويين لانه من القانون

$$س = \frac{٥}{١٢} \pm \sqrt{\frac{٢٥}{١٤٤} - \frac{١}{٦}} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٢٤}}{١٢} = \frac{٥ \pm ١}{١٢}$$

يحدث

$$س = \frac{٥ + ١}{١٢} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢} \quad و \quad س = \frac{٥ - ١}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$$

المثال الثالث اذا فرضت معادلة $س^{٢} + ١٤ س + ٤٩ = ٠$

وقورن حدها المعلوم الموجب المساوى ٤٩ بمربع نصف مكرر الحد الثانى أى مربع ٧ يكون ٤٩ مساويا لهذا المربع فاذن يكون الجذران حقيقيين ومتساويين وكل منهما مساويا لنصف مكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته أعنى أن كل جذر يكون مساويا -٧ لان

$$س = -٧ \pm \sqrt{٤٩ - ٤٩} = -٧$$

المثال الرابع اذا فرضت معادلة $س^{٢} \pm ح س + ح^{٢} = ٠$ وقورن حدها المعلوم $ح^{٢}$ بمربع نصف مكرر الحد الثانى أعنى $\frac{ح^{٢}}{٤}$ يكون $ح^{٢}$

اكبر

اكبر من $\frac{ج^{٢}}{٤}$ ويكون جذرا المعادلة تخيليين لان

$$س = -\frac{ج}{٢} \pm \sqrt{\frac{ج^{٢}}{٤} - ج^{٢}} = \frac{-ج \pm \sqrt{-٣ج^{٢}}}{٢} = \frac{-ج \pm ج\sqrt{-٣}}{٢}$$
$$= \frac{ج\left(-١ \pm \sqrt{-٣}\right)}{٢}$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب لحل معادلة كمعادلة $و س^{٢} + د س + هـ = ٠$
أن تقسم جميع حدودها على $و$ فيحدث $س^{٢} + \frac{د س}{و} + \frac{هـ}{و} = ٠$
وأن يختصر الحساب بفرض $\frac{د}{و} = ع$ و $\frac{هـ}{و} = ك$ فلو اريد الآن
حل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا الفرض حول $\frac{هـ}{و}$ الى الطرف
الثاني فيحدث $س^{٢} + \frac{د س}{و} = -\frac{هـ}{و}$ ولتتميم مربع الطرف الاول
يضاف لكل من طرفيها مربع نصف $\frac{د}{و}$ فيحدث

$$س^{٢} + \frac{د س}{و} + \frac{د^{٢}}{٤و^{٢}} = \frac{د^{٢}}{٤و^{٢}} - \frac{هـ}{و}$$

وباخذ جذر كل من الطرفين يحدث

$$س + \frac{د}{٢و} = \pm \sqrt{\frac{د^{٢}}{٤و^{٢}} - \frac{هـ}{و}}$$ ومنها يحدث

$$س = -\frac{د}{٢و} \pm \sqrt{\frac{د^{٢}}{٤و^{٢}} - \frac{هـ}{و}} = \frac{-د \pm \sqrt{د^{٢} - ٤وهـ}}{٢و}$$

فاذا رمز لجذرى المجهول $س$ بالرمزين $سَ$ و $سً$ يحدث

$$سَ = \frac{-د + \sqrt{د^{٢} - ٤وهـ}}{٢و} \quad و \quad سً = \frac{-د - \sqrt{د^{٢} - ٤وهـ}}{٢و}$$

(٧٩) ولنختبر ما يؤول اليه هذان المقداران بفرض فيهما مكرر و
مساويا للصفر فيحدث بناء عليه

$$سَ = \frac{-د + د}{٠} = \frac{٠}{٠} \quad و \quad سً = \frac{-د - د}{٠} = \frac{-٢د}{٠}$$

أعنى أن مقدار سً يكون لانهائيا ومقدار سَ الذى بهذه الصورة ÷
يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار فى هذه الحالة حادث من
وجود مضروب مشترك لحدى الكسر

$\frac{-ء+\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ}}{٢ح}$ ولتعيين هذا المضروب يضرب حدا الكسر فى
$-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ}$ فيحدث

$$سَ=\frac{(-ء+\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ})(-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ})}{٢ح(-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ})}=$$

$$\frac{ء^{٢}-ء^{٢}+٤حهـ}{٢ح(-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ})}=\frac{٤حهـ}{٢ح(-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ})}$$

وحيث أن كلا من حدى هذا الكسر الاخير يقبل القسمة على ٢ح يكون
٢ح هو المضروب المشترك ويحدث بعد حذفه

$$سَ=\frac{٢هـ}{-ء-\sqrt{ء^{٢}-٤حهـ}}$$

فاذا فرض الآن أن ح = ٠ ينتج

$$سَ=\frac{٢هـ}{-ء-ء}=\frac{٢هـ}{-٢ء}=-\frac{هـ}{ء}$$ أى $$سَ=-\frac{هـ}{ء}$$

وأما مقدار سً فهو لانهائى لانه بفرض ح = ٠ تؤول المعادلة
$ح س^{٢}+ء س+هـ=٠$ الى معادلة ذات درجة اولى $ء س+هـ=٠$
لاتحقق الا بمقدار واحد وهو $س=-\frac{هـ}{ء}$ وحيث ثبت ان مقدار
سَ معين ينتج من ذلك أن مقدار سً لانهائى

(فى مسائل الدرجة الثانية)

(المسئلة الاولى)

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة زائدا
المقسوم عليه مساويا ٢٥

فالجواب

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول س فخارج قسمة ٣٦ على س
يكون هكذا $\frac{٣٦}{\text{س}}$ فاذن تحدث هذه المعادلة $\frac{٣٦}{\text{س}} + \text{س} = ١٥$

ومنها يحدث $٣٦ + \text{س}^٢ = ١٥\,\text{س}$ أو $\text{س}^٢ - ١٥\,\text{س} + ٣٦ = ٠$
ومنها يحدث

$$\text{س} = \frac{١٥}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٢٥}{٤} - ٣٦} = \frac{١٥ \pm \sqrt{٢٢٥ - ١٤٤}}{٢} = \frac{١٥ \pm ٩}{٢}$$

فاذن يكون مقدارا س هكذا

$$\text{سَ} = \frac{١٥ + ٩}{٢} = ١٢ \quad \text{و} \quad \text{سُ} = \frac{١٥ - ٩}{٢} = ٣$$

فكل من مقداري $\text{سَ} = ١٢$ و $\text{سُ} = ٣$ يحقق منطوق المسألة

(المسألة الثانية)

(٨١) اذا كان المطلوب تقسيم ح الى جزئين يكون احدهما وسطا هندسيا بين ح الكلي والجزء الآخر يقال

لحل ذلك يرمز بالحرف س لجزء ح الذي يكون وسطا متناسبا فيكون الجزء الآخر مساويا $\text{ح} - \text{س}$ فاذن يكون

$$\text{ح} : \text{س} :: \text{س} : \text{ح} - \text{س}$$ ومنه يحدث

$$\text{س}^٢ = \text{ح}^٢ - \text{ح}\,\text{س} \quad . \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^٢ + \text{ح}\,\text{س} - \text{ح}^٢ = ٠$$ ومنها يحدث

$$\text{س} = -\frac{\text{ح}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} + \text{ح}^٢} = \frac{-\text{ح} \pm \sqrt{٥\,\text{ح}^٢}}{٢} = \frac{-\text{ح} \pm \text{ح}\sqrt{٥}}{٢}$$

فاذن يكون مقدارا س هكذا

$$\text{سَ} = \frac{-\text{ح} + \text{ح}\sqrt{٥}}{٢} = \frac{\text{ح}(-١ + \sqrt{٥})}{٢}$$

$$\text{سُ} = \frac{-\text{ح} - \text{ح}\sqrt{٥}}{٢} = \frac{-\text{ح}(١ + \sqrt{٥})}{٢}$$

فمقدار سَ يليق بمنطوق المسألة وأما مقدار سُ فغير لائق به لانه مقدار

سالب فيقطع النظر عنه فحينئذ يكون للمسئلة حل واحد هو

$$س = \frac{ح(-١+\sqrt{٥})}{٢}$$

(تنبيهان)

الاول مقدار $س = \frac{ح(-١+\sqrt{٥})}{٢}$ يكون أصم مهما كان ح لان اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لايوصل الى مقدار صحيح للمجهول س

الثانى قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجذران

$$س = \frac{ح(-١+\sqrt{٥})}{٢} \quad و \quad س = \frac{-ح(١+\sqrt{٥})}{٢}$$

اللذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يليق بمنطوق المسئلة المفروضة ويؤخذ من ذلك أن هذه المعادلة كناية عن مسئلة تكون المسئلة التى حلت سابقا حالة خصوصية منها ومنطوقها هكذا

المطلوب ايجاد عددين حاصل جمعهما مساو ح واحدهما وسط هندسى بين الآخر و ح

فاذا رمز بالرمز س لاحد العددين المجهولين الذى هو كناية عن الوسط الهندسى يوصل الى هذه المعادلة

$$س^٢ + ح س - ح^٢ = ٠$$

التى جذرها السالب يكون موافقا لمنطوق المسئلة كجذرها الموجب

(المسئلة الثالثة)

(٨٢) المطلوب كتابة عدد ٣١٧ فى جملة تعدادية بحيث تكون ارقامه ٦ و ٣ و ٢

فيفرض أن س رمز للاساس المجهول للجملة فالستة آحاد من الرتبة الثالثة للعدد المفروض تكافى $٦ س^٢$ والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية تكافى ٣ س فالعدد المعلوم يكافى

٦ $س^٢$ + ٣ س + ٢ وبناء عليه تحدث هذه المعادلة

٦ $س^٢$ + ٣ س + ٢ = ٣١٧ أو

٦ $س^٢$ + ٣ س − ٣١٥ = ٠ أو

$س^٢ + \frac{س}{٢} - \frac{١٠٥}{٢} = ٠$ ومنها يستخرج

$$س = -\frac{١}{٤} \pm \sqrt{\frac{١}{١٦} + \frac{١٠٥}{٢}} = \frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٨٤٠}}{٤} = \frac{-١ \pm ٢٩}{٤}$$

ومقدارا س يكونان

$$س' = \frac{-١ + ٢٩}{٤} = \frac{٢٨}{٤} = ٧ \quad و \quad س'' = \frac{-١ - ٢٩}{٤} = -\frac{١٥}{٢}$$

فيقطع النظر عن المقدار $س'' = -\frac{١٥}{٢}$ لان اساس الجملة التعدادية لا يكون سالبا ولا يوافق المسئلة فاذن يكتفى بجذرها الموجب

(المسئلة الرابعة)

(٨٣) اذا كان المطلوب تقسيم العدد ١٠ الى جزئين حاصل ضربهما يساوى ٣٨ فالجواب أن يقال

لحل هذه المسئلة توضع على هيئة معادلة كالعادة لكن يتذكر أن حاصل جمع جذرى معادلة ذات درجة ثانية يكون مساويا للمكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته وأن حاصل ضربهما يكون مساويا للحد المعلوم يكون العددان المطلوبان جذرى معادلة ذات درجة ثانية مكرر حدها الثانى مساو − ١٠ والحد المعلوم مساو ٣٨ فتكون المعادلة هكذا

$$س^٢ - ١٠ س + ٣٨ = ٠$$

فجذرا هذه المعادلة يكونان تخيليين لان الحد المعلوم موجب و أكبر من مربع نصف ١٠ فحينئذ تكون المسئلة المفروضة غير ممكنة الحل

ولمناقشة هذه المسئلة بطريقة عامة وبيان حوالها الممكنة وغير الممكنة

يفرض أن ح رمز للعدد الذى يراد تقسيمه وان م رمز لحاصل ضرب جزئيه فيكون العددان المجهولان مبينين بجذرى المعادلة

$$س^{2} - ح\,س + م = ٠$$

التى يستخرج منها $س = \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^{2}}{٤} - م}$ و $س' = \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^{2}}{٤} - م}$

فاذا كان $م > \frac{ح^{2}}{٤}$ كان هذان المقداران تخيليين فحينئذ تكون المسئلة غير ممكنة الحل

واذا كان $م = \frac{ح^{2}}{٤}$ كان هذان الجذران حقيقيين وكل منهما مساويا $\frac{ح}{٢}$. أعنى أن عدد ح يكون مقسوما فى هذه الحالة قسمين متساويين

واذا كان $م < \frac{ح^{2}}{٤}$ كان هذان المقداران حقيقيين غير متساويين ويصغر الفرق بينهما المساوى $٢\sqrt{\frac{ح^{2}}{٤} - م}$ كلما كبر مقدار م وينتج من ذلك نتائج هى

انه متى قسم العدد الى قسمين مختلفين وضربا فى بعضهما كان حاصل الضرب اكبر من العدد المذكور حين يكون الفرق بين الجزئين المختلفين قليلا ويكون هذا الحاصل اكبر ما يكون متى كان الجزآن المختلفان متساويين اعنى متى انقسم العدد المذكور الى قسمين متساويين

(المسئلة الخامسة)

(٨٤) ضوآن موضوعان أحدهما فى النقطة ا والآخر فى ب ومرموز للبعد ا ب الكائن بينهما بالحرف ى ولشدة الضوء ا بالحرف م ولشدة الآخر الكائن فى ب بالحرف ن والمطلوب تعيين النقطة الكائنة على المستقيم ا ب التى فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا م و ن رمزين لشدتى الضوئين بالنسبة لوحدة البعد نذكر ايضا قاعدة معلومة هى أن شدتى ضوء واحد واقع فى نقطتين على ابعاد غير متساوية

تكونان

تكونان مناسبتين لعكس مربعي بعدي هاتين النقطتين عن هذا الضوء

حَ   ب   ح   أ

فلحل ذلك نفرض أن ح النقطة المطلوبة ثم نرمز بالحرف س للبعد أح فيكون ب ح مساويا د ـ س وحيث أن م شدة الضوء أ بالنسبة لوحدة البعد تكون $\frac{\text{م}}{\text{س}^2}$ الشدة في النقطة ح بالنسبة للبعد س ومثل ذلك يقال في شدة الضوء ب في ح الكائنة على بعد مساو د ـ س تكون $\frac{\text{ن}}{(\text{د}-\text{س})^2}$ وحيث لزم ان تكون ح مستنيرة بنور واحد من الضوئين المذكورين يكون

$$\frac{\text{م}}{\text{س}^2} = \frac{\text{ن}}{(\text{د}-\text{س})^2}$$

فاذا حلل مربع الكمية ذات الحدين د ـ س وسلكت الطريقة العمومية لحل المعادلات تحصل

$$\text{م د}^2 - ٢\,\text{م د س} + \text{م س}^2 = \text{ن س}^2 \quad \text{أو}$$

$$(\text{م} - \text{ن})\,\text{س}^2 - ٢\,\text{م د س} + \text{م د}^2 = ٠ \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^2 - \frac{٢\,\text{م د س}}{\text{م} - \text{ن}} + \frac{\text{م د}^2}{\text{م} - \text{ن}} = ٠ \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$\text{س} = \frac{\text{م د}}{\text{م} - \text{ن}} \pm \sqrt{\frac{\text{م}^2\text{د}^2}{(\text{م} - \text{ن})^2} - \frac{\text{م د}^2}{\text{م} - \text{ن}}} = \frac{\text{م د} \pm \sqrt{\text{م}^2\text{د}^2 - \text{م}^2\text{د}^2 + \text{م ن د}^2}}{\text{م} - \text{ن}}$$

$$= \frac{\text{م د} \pm \text{د}\sqrt{\text{م ن}}}{\text{م} - \text{ن}}$$

فجذرا س يكونان هكذا

$$\left.\begin{aligned} \text{س}' &= \frac{\text{د}\left(\text{م} + \sqrt{\text{م ن}}\right)}{\text{م} - \text{ن}} \quad \text{و} \\ \text{س}'' &= \frac{\text{د}\left(\text{م} - \sqrt{\text{م ن}}\right)}{\text{م} - \text{ن}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (٢)$$

ويمكن حل المعادلة $\frac{\text{م}}{\text{س}^2} = \frac{\text{ن}}{(\text{د}-\text{س})^2}$ بطريقة أسرع من السابقة بأن

يستخرج من اول الامر جذر طرفيها فيحدث

$$\frac{\sqrt{\text{م}}}{\text{س}} = \frac{\pm\sqrt{\text{ن}}}{\text{د}-\text{س}} \quad \text{أو}$$

$$\text{د}\sqrt{\text{م}} - \text{س}\sqrt{\text{م}} = \pm\, \text{س}\sqrt{\text{ن}} \quad \text{أو}$$

$$(\sqrt{\text{م}} \pm \sqrt{\text{ن}})\,\text{س} = \text{د}\sqrt{\text{م}} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} \pm \sqrt{\text{ن}}}$$

فاذا استخرج منها مقدارا س يكونان بهذه الكيفيه

$$\left.\begin{aligned} \text{س}' &= \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}+\sqrt{\text{ن}}} \\ \text{و}\quad \text{س}'' &= \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}-\sqrt{\text{ن}}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٢)$$

ويسهل حساب البعد ـ ح أعني د ــ س بان يقال

$$\text{د}-\text{س} = \text{د} - \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}\pm\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}} \pm \text{د}\sqrt{\text{ن}} - \text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}\pm\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\pm\,\text{د}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{م}}\pm\sqrt{\text{ن}}}$$

ولتعيين مقداري د ــ س تؤخذ العلامتان العلويتان أو السفليتان فاذن يكون

$$\text{د}-\text{س}' = \frac{\text{د}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{م}}+\sqrt{\text{ن}}} \quad \text{و} \quad \text{د}-\text{س}'' = \frac{-\text{د}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{م}}-\sqrt{\text{ن}}}$$

وتكون حلتا مقداري مجهولي س و د ــ س هكذا

$$\text{س}' = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}+\sqrt{\text{ن}}} \quad \text{و} \quad \text{س}'' = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}-\sqrt{\text{ن}}}$$

$$\text{د}-\text{س}' = \frac{\text{د}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{م}}+\sqrt{\text{ن}}} \quad \text{و} \quad \text{د}-\text{س}'' = \frac{-\text{د}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{م}}-\sqrt{\text{ن}}}.$$

(تنبيه)

صورة مقداري س' و س'' المبينين بمعادلتي (٢) ليست كصورة مقداري (١) الحادثين من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الاولين

الاولين وبرهان ذلك ان يغير في بسط $س = \frac{ى(م + \sqrt{م ن})}{م - ن}$ المقدار م بالمقدار $\sqrt{م} \times \sqrt{م}$ ثم يوضع $\sqrt{م}$ مضروبا مشتركا فيؤل الى

$$س = \frac{ى\sqrt{م}(\sqrt{م} + \sqrt{ن})}{م - ن}$$

فاذا اعتبر مقدارا م و ن مربعي مقداري $\sqrt{م}$ و $\sqrt{ن}$ يكون المقام مكونا من فاضل مربعين فاذن يكون

$$س = \frac{ى\sqrt{م}(\sqrt{م} + \sqrt{ن})}{(\sqrt{م} + \sqrt{ن})(\sqrt{م} - \sqrt{ن})} = \frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$$

وهو مقدار مساو لمقدار $س'$ المستخرج بالحل الثاني ومثل هذا يقال في اثبات تساوي المقدارين الاخيرين

(مناقشات)

الاولى اذا فرض ان $م > ن$ يكون مقدار $س = \frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}}$ موجبا واكبر من $\frac{ى}{٢}$ لان المقام $\sqrt{م} + \sqrt{ن}$ اصغر من $٢\sqrt{م}$ لان $م > ن$ فاذن يكون الكسر $\frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}}$ اكبر من الكسر $\frac{ى\sqrt{م}}{٢\sqrt{م}}$ أو من $\frac{ى}{٢}$ ويكون مقدار $ى - س$ المطابق لمقدار $س'$ موجبا ايضا غير انه اصغر من $\frac{ى}{٢}$ فاذن توجد نقطة كنقطة ح مستنيرة بنور واحد من الضوئين ا و ب وتكون اقرب الى ب من ا وهذا يوافق فرض $م > ن$

ومقدار $س' = \frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$ يكون موجبا ايضا حيث ان $م > ن$ ويكون اكبر من ى لان المقام $\sqrt{م} - \sqrt{ن}$ اصغر من $\sqrt{م}$ فاذن يكون الكسر $\frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$ اكبر من $\frac{ى\sqrt{م}}{\sqrt{م}}$ أو من ى ومقدار

$د - سَ = \frac{د\sqrt{ح}}{\sqrt{م} - \sqrt{ق}}$ المطابق للاول يكون سالبا لان بسطه سالب ومقامه موجب أو يقال حيث أن سَ اكبر من د يكون د ـ سَ بالضرورة سالبا فاذن يوجد على المستقيم ا ب نقطة ثانية ح مستنيرة بنور واحد من الضوئين المفروضين وتكون على يمين النقطة ب لان بعدها عن ا اكبر من د وهذا الناتج يوافق ايضا م > ق

الثانية اذا فرض أن م < ق يكون مقدار $سَ = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ق}}$ موجبا غير انه بواسطة برهان كالمتقدم فى الحالة السابقة يبرهن على أن سَ يكون أصغر من $\frac{د}{٢}$ وان المقدار المطابق له وهو $د - سَ = \frac{د\sqrt{ق}}{\sqrt{م} + \sqrt{ق}}$ موجبا واكبر من $\frac{د}{٢}$ فاذن تكون النقطة الاولى مستنيرة بنور واحد من الضوئين الموضوعين فى النقطتين ا و ب واقرب الى النقطة ا من ب وهذا يوافق فرض م < ق

ب ح ا ح

والمقدار الثانى وهو $سً = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ق}}$ يكون سالبا لان بسطه موجب ومقامه سالب ولتوضيح هذا المقدار كما فى النوع الثانى من (بند ٤٧) يغير فى المعادلة

$\frac{م}{سَ^٢} = \frac{ق}{(د - سَ)^٢}$ علامة س فتؤل الى $\frac{م}{سَ^٢} = \frac{ق}{(د + س)^٢}$ لانه بالعنونة عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المفروضة بدون تغيير غير ان هذه المعادلة يعلم منها ان النقطة المستنيرة بنور واحد من الضوئين يكون بعدها عن النقطة ب اكبر من د فحينئذ تكون النقطة الثانية ح

المستنيرة بنور واحد من الضوئين على يسار النقطة ا وبعدها عنها مبينا بمقدار سالب هو $س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$ لان جذرى المعادلة المغيرة عين جذرى المعادلة المفروضة وأما المقدار المطابق لمقدار $س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$ وهو

$$د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$$ فيمكن وضعه بهذه الصورة

$$د - س = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{ن}-\sqrt{م}}$$

وحينئذ تسهل البرهنة على انه موجب واكبر من د وهذا الناتج يوافق وضع النقطة ح المعين سابقا وفرض $م < ن$

الثالثة اذا فرض أن $م = ن$ كان مقدارا

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$$ موجبين

ومساويا كل منهما $\frac{د}{٢}$ وكانت النقطة الاولى المستنيرة بنور واحد من الضوئين على بعدين متساويين من النقطتين ا و ب وهذا الناتج يوافق فرض $م = ن$

وأما المقداران الآخران اللذان هما

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$$ فيؤلان الى

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{٠} \quad و \quad د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{٠}$$ وهما مقداران لانهائيين

(انظر المناقشة الثالثة من بند ٤٥) وحينئذ تكون النقطة المستنيرة بنور واحد من الضوئين على بعد لانهائى من النقطتين ا و ب اعنى لاوجود لها لان فرض $م = ن$ لا ينتج نقطة اخرى مستنيرة بنور واحد على المستقيم

ا ـ لا على بين نقطة ب ولا على شمال نقطة ا

الرابعة اذا فرض ان م = ن و د = ٠ في آن واحد آل المقدارا

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$$ الى

$$= \frac{٠}{٢\sqrt{م}} = ٠$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التي وضع فيها الضوآن واما المقداران الآخران اللذان هما

$$س' = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س' = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$$

فيؤلان الى $\frac{٠}{٠}$ اعنى انهما غير معينين وحينئذ تكون جميع نقط المستقيم ا ب المار بالنقطة الموضوع فيها الضوآن مستنيرة بنور واحد من الضوئين وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوئين في نقطة واحدة وان شدتهما واحدة

(في المعادلات التي يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)

(٨٥) تحل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية عن الحد المعلوم بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فلحل المعادلة العمومية

$$س^٣ + ح س^٢ + ك س = ٠$$

يوضع س مضروبا مشتركا فيها فتؤل الى المعادلة

$$س (س^٢ + ح س + ك) = ٠$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوى على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف الثاني اى الصفر يكفي لتحقيقها فرض احد المضروبين مساويا لصفر وحينئذ تكون المعادلة متحققة بفرض س = ٠ أو

$$س^٢ + ح س + ك = ٠$$ الذي يحدث منه

$$س = -\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك} \quad و \quad س' = -\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}$$

وبالجملة فيكون للمجهول $سـ$ ثلاثة مقادير هى

$$سـَ = -\frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك} \quad و \quad سـً = -\frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك} \quad و \quad سـٌ = ٠$$

ويمكن حل المعادلة $سـ^٤ + ع سـ^٣ + ك سـ^٢ = ٠$ ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة اولى بحل نظير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربيع معادلة لا تحتوى الا على المجاهيل بدرجات مزدوجة وتحل المعادلة المضاعفة التربيع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فلحل المعادلة العمومية

$$سـ^٤ + ع سـ^٢ + ك = ٠$$

يجعل $سـ^٢ = صـ$ ومنه يستخرج $سـ = \pm\sqrt{صـ}$ ثم يوضع فى المعادلة المفروضة بدل $سـ$ مقداره فتؤول الى

$$صـ^٢ + ع صـ + ك = ٠$$

ومنها يحدث

$$صـ = -\frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$

واذا وضع على التعاقب بدل $صـ$ مقداره فى $سـ = \pm\sqrt{صـ}$

حدث $سـ = \pm\sqrt{-\frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}}$ و $سـ = \pm\sqrt{-\frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}}$

فاذن يكون لمجهول $سـ$ أربعة مقادير هى

$$سـَ = \sqrt{-\frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}} \quad و \quad سـٌ = \sqrt{-\frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}}$$

$$سـً = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}} \quad و \quad سـٍ = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}}$$

(مناقشات)

(٨٧) قد حولت المعادلة المفروضة الى معادلة بهذه الصورة

$$ص^{2} + ع\,ص + ل = ٠$$

بفرض $س^{2} = ص$ أى $س = \pm \sqrt{ص}$

وينتج من الارتباط الاخيران كل مقدار فرض لمجهول $ص$ يحدث مقدارين متساويين ومتخالفى العلامة للمجهول $س$ ومن المعلوم أن مجهول $ص$ من كل معادلة كمعادلة

$$ص^{2} + ع\,ص + ل = ٠$$ له مقداران

فاذن يكون لمجهول $س$ أربعة مقادير متساوية مثنى ومتخالفة العلامة فحينئذ يقال

كل معادلة مضاعفة التربيع ذات درجة رابعة لها أربعة جذور متساوية مثنى ومتخالفة فى العلامة

ولنختبر الاحوال التى فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث أن $س = \pm \sqrt{ص}$ ينتج بالبداهة انه اذا كان جذرا $ص$ موجبين تكون جذور مجهول $س$ الاربعة حقيقية واذا كان احد جذرى $ص$ موجبا والآخر سالبا يكون جذران من الاربعة حقيقين والآخران تخيلين

واذا كان جذرا $ص$ سالبين تكون جذور $س$ الاربعة تخيلية واذا كان جذرا $ص$ تخيلين تكون جذور مجهول $س$ الاربعة كذلك

وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير $ع$ و $ل$ وعلامتيهما وفى اى الاحوال يكون مقدارا $ص$ حقيقين او تخيلين موجبين أو سالبين يسهل حينئذ معرفة جذور $س$ هل هى حقيقية او تخيلية فى جميع الفروضات الممكنة

(وهاك جدولا يحتوى على جميع الاحوال التي يمكن بيانها)

اذا كان ك > ٠ وكان { ك < ح^٢/٤ ، ح > ٠ }	يكون صَ و صً حقيقيين وموجبين	وسَ و سً و سَ و سً حقيقيه
اذا كان ك > ٠ وكان { ك < ح^٢/٤ ، ح < ٠ }	يكون صَ و صً حقيقيين وسالبين	ويكون سَ و سً و سَ و سً تخيليه
اذا كان ك > ٠ وكان { ك > ح^٢/٤ }	يكون صَ و صً تخيليين	ويكون سَ و سً و سَ و سً تخيليه
اذا كان ك < ٠	يكون صَ و سً حقيقيين ومتخالفي العلامة	ويكون { سَ و سً حقيقيين ، سَ و سً تخيليين }

يمكن مناقشة الاحوال الخصوصية التي يكون فيها كل من ح و لـ مساويا للصفر في آن واحد أو على التعاقب والحالة التي يكون فيها $لـ = \frac{ح^2}{4}$ فيقال

اذا كان $\left\{ \begin{array}{l} لـ = 0 \\ ح \neq 0 \end{array} \right.$ يكون $صَ = 0$ و $صً = -ح$ ويكون

$سَ = 0$ و $سً = \sqrt{-ح}$ ويكون سً و سٌ حقيقيين اذا كان $ح < 0$

$سٍ = 0$ و $سٌ = -\sqrt{-ح}$ وتخيليين اذا كان $ح > 0$

اذا كان $\left\{ \begin{array}{l} لـ \neq 0 \\ ح = 0 \end{array} \right.$ يكون $صَ = \sqrt{-لـ}$ و $صً = -\sqrt{-لـ}$ ويكون

$سَ = \sqrt[4]{-لـ}$ و $سً = \sqrt{-\sqrt{-لـ}}$ ويكون سَ و سٌ حقيقيين اذا كان $لـ < 0$

$سٍ = -\sqrt[4]{-لـ}$ و $سٌ = -\sqrt{-\sqrt{-لـ}}$ و سَ و سً و سٍ و سٌ تخيلية اذا كان $لـ > 0$

واذا كان $\left\{ \begin{array}{l} لـ = 0 \\ ح = 0 \end{array} \right.$ يكون $صَ = 0$ و $صً = 0$ ويكون

$سَ = 0$ و $سً = 0$

$سٍ = 0$ و $سٌ = 0$

واذا كان $\left\{ لـ = \frac{ح^2}{4} \right.$ يكون $صَ = -\frac{ح}{2}$ و $صً = -\frac{ح}{2}$ ويكون

$سَ = \sqrt{-\frac{ح}{2}}$ و $سً = \sqrt{-\frac{ح}{2}}$ وتكون الجذور الاربعة حقيقية متساوية ومتخالفة العلامة مثنى اذا كان $ح < 0$

$سٍ = -\sqrt{-\frac{ح}{2}}$ و $سٌ = -\sqrt{-\frac{ح}{2}}$ وتكون تخيلية اذا كان $ح > 0$

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية فنقول

(المثال الاول)

اذا فرضت المعادلة $س^٤ - ١٣ س^٢ + ٣٦ = ٠$ وجعل فيها $س^٢ = ص$ تؤل الى

$$ص^٢ - ١٣ ص + ٣٦ = ٠$$

فجذرا ص يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وموجبين أما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثانى وأما الثانى فلان الحد المعلوم موجب وأما الثالث فلان مكرر الحد الثانى سالب فاذن تكون جذور المجهول س الاربعة حقيقية ويتحقق هذا باجراء الحساب وذلك بان يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$ص = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٦٩}{٤} - ٣٦} = \frac{١٣ \pm \sqrt{١٦٩ - ١٤٤}}{٢} = \frac{١٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٢} = \frac{١٣ \pm ٥}{٢}$$

وينتج من ذلك

$$ص = \frac{١٣ + ٥}{٢} = ٩ \text{ و } ص' = \frac{١٣ - ٥}{٢} = ٤$$ فاذن يكون

$$س = \pm \sqrt{٩} = \pm ٣ \text{ و } س' = \pm \sqrt{٤} = \pm ٢$$

(المثال الثانى)

اذا فرضت المعادلة $س^٤ + ٣ س^٢ + ٢ = ٠$ وجعل فيها $س^٢ = ص$ آلت الى

$$ص^٢ + ٣ ص + ٢ = ٠$$

فجذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين متحدى العلامة وسالبين أما الاول والثانى فيبرهن عليهما بمثل ما تقدم فى المعادلة السابقة وأما الثالث

فلان مكرر الحد الثانى موجب فاذن تكون الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة التربيع تخيلية لان مقدارى صه يكونان

$$صَه = - ١ \quad و \quad صً = - ٢ \; .$$

فحينئذ يكون $سَ = \pm \sqrt{- ١}$ و $سً = \pm \sqrt{- ٢}$

(المثال الثالث)

اذا فرضت المعادلة $س^{٤} - س^{٢} - ٦ = ٠$ ثم جعل فيها

$س^{٢} = صه$ تؤل الى

$$صه^{٢} - صه - ٦ = ٠$$

وحيث ان الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا صه حقيقيين ومتخالفين فى العلامة ويكون اثنان من الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقدارى صه ومقادير س فيحدث

$$صَه = ٣ \quad و \quad صً = - ٢$$

وبناء عليه يحدث

$$سَ = \pm \sqrt{٣} \quad و \quad سً = \pm \sqrt{- ٢}$$

(المثال الرابع)

اذا فرضت المعادلة $٥ س^{٤} - ٧ س^{٢} + ٣ = ٠$ وجعل فيها

$س^{٢} = صه$ وقسمت جميع حدودها على ٥ تؤل الى

$$صه^{٢} - \frac{٧ صه}{٥} + \frac{٣}{٥} = ٠$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب واكبر من مربع نصف مكرر الحد الثانى يكون جذرا صه تخيليين فاذن تكون جذور سه كذلك

لانه يحصل

$\text{صَ} = \frac{٧ + \sqrt{-١١}}{١٠}$ و $\text{صً} = \frac{٧ - \sqrt{-١١}}{١٠}$ وبناء عليه يحدث

$\text{سَ} = \pm \sqrt{\frac{٧ + \sqrt{-١١}}{١٠}}$ و $\text{سً} = \pm \sqrt{\frac{٧ - \sqrt{-١١}}{١٠}}$

(٨٩) لحل معادلتين ذاتى مجهولين ودرجة ثانية يحذف اولا احد المجهولين باحدى الطرق المعلومة المقررة فى حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كما فى (بند ٣٦) .

فاذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{ء}^{٢}$$

$$\text{س} + \text{ص} = \text{ح}$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول ص ويوضع فى الاولى فيحدث على التوالى

$$\text{س}^{٢} + (\text{ح} - \text{س})^{٢} = \text{ء}^{٢} \text{ أو}$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ح}^{٢} + \text{س}^{٢} - ٢\,\text{ح}\,\text{س} = \text{ء}^{٢} \text{ أو}$$

$$٢\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{ح}\,\text{س} + \text{ح}^{٢} - \text{ء}^{٢} = ٠ \text{ أو}$$

$$\text{س}^{٢} - \text{ح}\,\text{س} + \frac{\text{ح}^{٢} - \text{ء}^{٢}}{٢} = ٠ \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ح} \pm \sqrt{٢\,\text{ء}^{٢} - \text{ح}^{٢}}}{٢}$$

واذا وضع بدل س بمقداره فى معادلة $\text{ص} = \text{ح} - \text{س}$ تؤل الى

$$\text{ص} = \frac{\text{ح} \mp \sqrt{٢\,\text{ء}^{٢} - \text{ح}^{٢}}}{٢}$$

فحينئذ المعادلتان المفروضتان تكونان متحققتين بكل من مقدارى س ومقدارى ص غير انه يلزم اخذ العلامتين العلويتين أو السفليتين لكل من المقدارين المأخوذين من مقدارى ص ومقدارى س

ولننبه ايضا على ان مقدارى ص يكونان عين مقدارى س لان المعادلتين المفروضتين لا تتغيران متى غير فيهما المجهول س بالمجهول ص والمجهول ص بالمجهول س فاذا عين مقدارا س قبل التغيير كانا عيني مقدارى ص المستخرجين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين $س^2 + ص^2 = ح^2$ و $2 س ص = ء^2$ فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار ص فيكون $ص = \frac{ء^2}{2س}$ ثم يوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى فيحدث على التوالى

$$س^2 + \frac{ء^4}{4س^2} = ح^2 \quad \text{أو}$$

$$4س^4 + ء^4 = 4ح^2س^2 \quad \text{أو}$$

$$س^4 - ح^2س^2 + \frac{ء^4}{4} = 0$$ ومنها يحدث

$$س = \pm\sqrt{\frac{ح^2}{2} \pm \sqrt{\frac{ح^4 - ء^4}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{ح^2 \pm \sqrt{ح^4 - ء^4}}{2}}$$

ولاستخراج مقدارى ص يوضع فى المعادلة $ص = \frac{ء^2}{2س}$ بدل س المقدار المضاعف $\pm\sqrt{\frac{ح^2 + \sqrt{ح^4 - ء^4}}{2}}$ ثم يوضع أيضا المقدار المضاعف $\pm\sqrt{\frac{ح^2 - \sqrt{ح^4 - ء^4}}{2}}$ بدل س ويختصر فيحدث للمجهول ص مقدار رباعى وهو $ص = \pm\sqrt{\frac{ح^2 \mp \sqrt{ح^4 - ء^4}}{2}}$

وتحقق المعادلتان المفروضتان بجملة مقادير س الاربعة وجملة مقادير ص الاربعة وتستنتج هاتان الجملتان بتنسيق علامات مقدار س باربعة

طرق

طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير ص فحينئذ تكون مقادير ص عين مقادير س وهذا ناشئ من كون المجهولين داخلين بكيفية واحدة في المعادلتين المفروضتين

(تنبيه)

لامكان تحويل مقدار $س = \pm \sqrt{\frac{ح^{2} \pm \sqrt{ح^{4} - ء^{4}}}{2}}$ الى هذه الصورة $س = \sqrt{ح'} + \sqrt{ء'}$ يجب أن يكون $ح_{1}^{2} - ء_{1}$ مربعا كاملا كما في (بند ٦٦) ومن المثال المفروض ينتج $ح_{1} = \frac{ح^{2}}{2}$ او $ح_{1}^{2} = \frac{ح^{4}}{4}$ و $ء_{1} = \frac{ح^{4} - ء^{4}}{4}$ فاذن يكون

$ح_{1}^{2} - ء_{1} = \frac{ح^{4} - ح^{4} + ء^{4}}{4} = \frac{ء^{4}}{4}$ أي أن $ح_{1}^{2} - ء_{1}$ مربع كامل فاذن يمكن تحويل المقدار المفروض الى مقدار آخر بهذه الصورة $\sqrt{ح'} + \sqrt{ء'}$

وحيث علم من (بند ٦٦) بعد الرمز الى $ح_{1}^{2} - ء_{1}$ بالحرف $هـ^{2}$ أن $ح' = \frac{ح_{1} + هـ}{2}$ و $ء' = \frac{ح_{1} - هـ}{2}$ وتقدم أن $ح_{1} = \frac{ح^{2}}{2}$ و $هـ = \sqrt{\frac{ء^{4}}{4}} = \frac{ء^{2}}{2}$ يكون $ح' = \frac{ح^{2} + ء^{2}}{4}$ و $ء' = \frac{ح^{2} - ء^{2}}{4}$ وبالجملة فيكون

$$س = \pm \sqrt{\frac{ح^{2} + ء^{2}}{4}} \pm \sqrt{\frac{ح^{2} - ء^{2}}{4}} \quad أو \quad س = \pm \frac{1}{2}\sqrt{ح^{2} + ء^{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{ح^{2} - ء^{2}}$$

ويإجراء عمل مشابه لذلك يحدث

$$\text{ص} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2-\text{د}^2}$$

(الحل الثانى)

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهلة بطريقة أخصر من الطريقة المستعملة فى حل المعادلتين المفروضتين اللتين هما $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ح}^2$ و $2\,\text{س}\,\text{ص} = \text{د}^2$ وذلك بأن يجمعا طرفا الى طرف مع ملاحظة أن الطرف الاول الناتج يكون مربعا كاملا للكمية ذات الحدين $\text{س} + \text{ص}$ فيحدث $(\text{س} + \text{ص})^2 = \text{ح}^2 + \text{د}^2$ ومنها يستخرج

$$\text{س} + \text{ص} = \pm \sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}$$

ثم نطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$(\text{س} - \text{ص})^2 = \text{ح}^2 - \text{د}^2$ ومنها ينتج

$$\text{س} - \text{ص} = \pm \sqrt{\text{ح}^2-\text{د}^2}$$

وحيث علم مجموع المجهولين س و ص وفاضلهما يستخرج كل منهما بواسطة القاعدة المقررة فى (بند ٣) فيكونان

$$\text{س} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2-\text{د}^2} \quad \text{و}$$

$$\text{ص} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2-\text{د}^2}$$

(٩١) متى احتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعى مشتمل على المجهول المذكور أو على علامات جذور كذلك فلحلها يلزم أولا حذف العلامة او العلامات كما فى الامثلة الآتية

(المثال الاول)

اذا كان المطلوب حل هذه المعادلة

$$٣\,\text{س} = ٥\sqrt{\text{س}} + ٢$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثانى محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$(٣\,\text{س} - ٢)^{٢} = (٥\sqrt{\text{س}})^{٢}$$ او

$$٩\,\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٤ = ٢٥\,\text{س}$$ او

$$٩\,\text{س}^{٢} - ٣٧\,\text{س} + ٤ = ٠$$ أو

$$\text{س}^{٢} - \frac{٣٧}{٩}\text{س} + \frac{٤}{٩} = ٠$$ ومنها يحدث

$$\text{س} = \frac{٣٧}{١٨} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٧}{١٨}\right)^{٢} - \frac{٤}{٩}} = \frac{٣٧ \pm \sqrt{٣٧^{٢} - ٤ \times ٣٦}}{١٨} = \frac{٣٧ \pm \sqrt{١٢٢٥}}{١٨}$$

$$= \frac{٣٧ \pm ٣٥}{١٨}$$ فاذن يكون

$$\text{س}' = \frac{٣٧ + ٣٥}{١٨} = \frac{٧٢}{١٨} = ٤ \quad \text{و} \quad \text{س}'' = \frac{٣٧ - ٣٥}{١٨} = \frac{٢}{١٨} = \frac{١}{٩}$$

ولتحقيق هذين المقدارين يوضع فى المعادلة $٣\,\text{س} - ٢ = ٥\sqrt{\text{س}}$ بدل س مقداره وهو ٤ فيحدث

$$١٢ - ١٠ = ٢ \quad \text{أو} \quad ٢ = ٢$$

اعنى ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع فى المعادلة بعينها بدل س مقداره وهو $\frac{١}{٩}$ تؤل الى $\frac{١}{٣} - ٢ = \frac{٥}{٣}$ أو $-\frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٣}$ وهذا تساو فاسد به يثبت ان مقدار $\text{س} = \frac{١}{٩}$ لا يكون محققا للمعادلة $٣\,\text{س} - ٢ = ٥\sqrt{\text{س}}$

ولو كان محققا للمعادلة $٩\,\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٤ = ٢٥\,\text{س}$

لان بعض مقادير المجهول س اذا صير طرفى المعادلة $٣\,\text{س} - ٢ = ٥\sqrt{\text{س}}$ متساويين ومتخالفين فى العلامة يصير طرفى المعادلة

$٩\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٤ = ٢٥\text{س}$ متساويين لان هذين الطرفين حادثان من تربيع طرفى المعادلة الاولى

فلايجاد المعادلة التى تحقق بمقدار $\text{س} = \frac{١}{٩}$ تغير العلامة المتلوة بعلامة الجذر فى المعادلة $٣\text{س} - ٢ = ٥\sqrt{\text{س}}$ وبه تؤول الى

$$٣\text{س} - ٢ = -٥\sqrt{\text{س}}$$

(المثال الثانى)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $\sqrt{٣\text{س} + ١} = ٢ + \sqrt{\text{س} - ١}$ يرفع طرفاها للدرجة الثانية فتصير

$$٣\text{س} + ١ = ٤ + ٤\sqrt{\text{س} - ١} + \text{س} - ١$$

وبترك علامة الجذر فى الطرف الثانى واختصار الناتج يحدث

$٢\text{س} - ٢ = ٤\sqrt{\text{س} - ١}$ او $\text{س} - ١ = ٢\sqrt{\text{س} - ١}$

ثم يربع الطرفان ثانيا فيحدث

$$\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ = ٤\text{س} - ٤ \text{ أو}$$

$$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥ = ٠$$ ومنها يحدث

$\text{س} = ٣ \pm \sqrt{٩ - ٥} = ٣ \pm \sqrt{٤} = ٣ \pm ٢$ فاذن يكون

$$\text{س}' = ٣ + ٢ = ٥ \text{ و } \text{س}'' = ٣ - ٢ = ١$$

ومقدارا $\text{س}'$ و $\text{س}''$ يحققان المعادلة المفروضة

(المثال الثالث)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $\sqrt{٢(\text{س} - ١)} - \sqrt{\text{س} + ١} - \sqrt{\text{س}(٣ - \text{س})} = ٠$ تحول علامة الجذر الثالثة الى الطرف الثانى ثم يربع كل من الطرفين فيحدث

$$٢\text{س} - ٢ - ٢\sqrt{٢(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} + \text{س} + ١ = ٣\text{س} - \text{س}^٢ \text{ أو}$$

$$س^٢ - ١ = ٢ \sqrt{٢(س^٢-١)}$$

ثم يربع ايضا طرفا هذه المعادلة الاخيرة فيحدث

$$س^٤ - ٢س^٢ + ١ = ٨س^٢ - ٨ \text{ او } س^٤ - ١٠س^٢ + ٩ = ٠$$ ومنها يحدث

$$س = \pm\sqrt{٥ \pm \sqrt{٢٥-٩}} = \pm\sqrt{٥\pm\sqrt{١٦}} = \pm\sqrt{٥\pm٤}$$

فاذن يكون لمجهول س أربعة مقادير متغايرة هى

$$س = +\sqrt{٥+٤} = +٣ \text{ و } س = +\sqrt{٥-٤} = +١$$

$$س = -\sqrt{٥+٤} = -٣ \text{ و } س = -\sqrt{٥-٤} = -١$$

ولا تحقق المعادلة المفروضة بمقدارى $س = -٣$ و $س = +١$

(الباب الرابع)

(فى المتناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغريتم)

(فى المتناسبة العددية أى التفاضلية)

(٩٢) براهين خواص المتناسبة المقررة فى كتب علم الحساب تسهل جدا بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل متناسبة عددية كالمتناسبة

$$ح \cdot ء : هـ \cdot و$$

توضع هكذا

$$ح - ء = هـ - و$$ ومنها يستخرج

$$ح + و = هـ + ء \text{ و } و = هـ + ء - ح \text{ و } هـ = ح + و - ء$$

أعنى أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها وأن احد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها منقوصا منه الطرف الآخر وأن أحد وسطيها يساوى حاصل جمع طرفيها منقوصا منه الوسط الآخر ويستنتج من المتساوية $ح + و = هـ + ء$ أن $ح - ء = هـ - و$ وأعنى

اذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع آخرين تركب من هذه الاعداد الاربعة متناسبة عددية جزآ أحد الحاصلين طرفاها وجزآ الآخر وسطاها
والوسط التفاضلى لعددين يساوى نصف حاصل جمعهما لانه من المتناسبة

ح . س : س . ء يحدث

٢ س = ح + ء ومن هذه المتساوية ينتج

$$\text{س} = \frac{\text{ح} + \text{ء}}{٢}$$

(فى المتناسبة الهندسية)

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : ء :: ه : و
توضع هكذا $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{ه}}{\text{و}}$ ومن هذه المتساوية يستنتج

ح و = ء ه و $\text{و} = \frac{\text{ء ه}}{\text{ح}}$ و $\text{ه} = \frac{\text{ح و}}{\text{ء}}$

أعنى أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب وسطيها وأن احد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية ح و = ء ه أنّ $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{ه}}{\text{و}}$
أعنى اذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين تركب من هذه الاعداد الاربعة متناسبة هندسية اصلا أحد الحاصلين طرفان لها واصلا الحاصل الآخر وسطان لها

ويستنتج من المتساوية ح و = ء ه بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

ح : ء :: ه : و، ح : ه :: ء : و، و : ء :: ه : ح، و : ه :: ء : ح
ء : ح :: و : ه، ء : و :: ح : ه، ه : و :: ح : ء، ه : ح :: و : ء

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الاربعة أن الاعداد الاربعة المتناسبة مع بعضها يتكون منها متناسبة ايضا بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين ويشاهد ايضا من متناسبات الصف الثانى الاربعة ان التناسب لا يتغير بتغيير الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسى بين عددين او كميتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من

المتناسبة

المتناسبة ح : س :: س : د يحدث

$$س^2 = ح \times د \quad او \quad س = \sqrt{ح \times د}$$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة فى عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة على حالها لانه يستنتج من المتساوية $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$ أن

$\frac{ح}{د} = \frac{هم}{وم}$ او ح : د :: هم : وم

ويستنتج ايضا من المتساوية المذكورة $\frac{ح}{ه} = \frac{د}{و}$ ومن هذه يحدث

$\frac{ح}{ه} = \frac{دم}{وم}$ أى ح : ه :: دم : وم

وبمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

واذا كان لمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الاخريين منهما متناسبة فالمتناسبتان

ح : د :: ه : و و ح : د :: هَ : وَ يوضعان هكذا

$\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$ و $\frac{ح}{د} = \frac{هَ}{وَ}$ ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{ه}{و} = \frac{هَ}{وَ}$ أى ه : و :: هَ : وَ

ومتى اتحد المقدمان أو التاليان فى متناسبتين تركب من غير المتحد منهما متناسبة فالمتناسبتان

ح : د :: ه : و و ح : ع :: ه : ل أو

د : ح :: و : ه و ع : ح :: ل : ه

يستنتج منهما بمقتضى ما تقدم

ح : ه :: د : و و ح : ه :: ع : ل فاذن يحدث

د : و :: ع : ل أى د : ع :: و : ل

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : د :: ه : و يمكن وضعها هكذا $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$ وباضافة واحد لكل من طرفى هذه المتساوية أو طرحه منهما نؤول الى

ج/د ± ١ = ه/و ± ١ أى

(ج ± د)/د = (ه ± و)/و ومنها يحدث

ج + د : د :: ه + و : و و ج − د : د :: ه − و : و

ويحدث ايضا من مقارنة المتناسبة ج : د :: ه : و بكل من المتناسبتين المتقدمتين ان

ج + د : ج :: ه + و : ه و ج − د : ج :: ه − و : ه

ومنهما يحدث

ج + د : ج − د :: ه + و : ه − و

ونتج من ذلك أن نسبة المقدم الاول زائدا اوناقصا التالى الاول الى هذا التالى كنسبة المقدم الثانى زائدا أوناقصا التالى الثانى الى هذا التالى وأن نسبة المقدم الاول زائدا أوناقصا التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة المقدم الثانى زائدا أوناقصا تاليه الى هذا المقدم وأن نسبة المقدم الاول زائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه كنسبة المقدم الثانى زائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه

واذا غير وسطا المتناسبة ج : د :: ه : و آلت الى

ج : ه :: د : و ومنها يحدث بناء على ماتقدم

ج ± ه : د ± و :: ه : و :: ج : د ومنها يحدث

ج + ه : د + و :: ج − ه : د − و

أعنى ان نسبة حاصل جمع اوفاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع اوفاضل تاليهما كنسبة أى مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع تاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين والمتناسبة التى بهذه الصورة ج : د :: ه : و :: ز : ح :: ط : ى :: الخ تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تواليها كنسبة

ى مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة فى هذه المتناسبة بالحرف ل

تحصل $\frac{ج}{د} = ل$ و $\frac{ه}{و} = ل$ و $\frac{ز}{ح} = ل$ و $\frac{ط}{ى} = ل$ ...... الخ

ومنها يحدث

ج = د ل و ه = و ل و ز = ح ل و ط = ى ل و ... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يحدث

ج + ه + ز + ط + الخ = ل (د + و + ح + ى + ... الخ)

ومنها يحدث

$$\frac{ج + ه + ز + ط + ... الخ}{د + و + ح + ى + ... الخ} = ل = \frac{ج}{د} = \frac{ه}{و} = الخ$$ فاذن يكون

ج + ه + ز + ... الخ : د + و + ح + ... الخ :: ج : د :: ه : و :: الخ

واذا ضربت جملة متناسبات فى بعضها كل حد فى نظيره تكون من حواصل الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالمتناسبات

ج : د :: ه : و و ج' : د' :: ه' : و' و ج'' : د'' :: ه'' : و''

يحدث منها

$\frac{ج}{د} = \frac{ه}{و}$ و $\frac{ج'}{د'} = \frac{ه'}{و'}$ و $\frac{ج''}{د''} = \frac{ه''}{و''}$ وبضربها فى بعضها يحدث

$\frac{ج ج' ج''}{د د' د''} = \frac{ه ه' ه''}{و و' و''}$ اى ج ج' ج'' : د د' د'' :: ه ه' ه'' : و و' و''

واذا رفع كل من الحدود الاربعة متناسبة لى درجة ما او اخذ جذر كل منها بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالمتناسبة ج : د :: ه : و توضع هكذا

$\frac{ج}{د} = \frac{ه}{و}$ فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما او اخذ جذر ......

ما بقيت على حالها فيكون

$\frac{ج^م}{د^م} = \frac{ه^م}{و^م}$ و $\frac{\sqrt[م]{ج}}{\sqrt[م]{د}} = \frac{\sqrt[م]{ه}}{\sqrt[م]{و}}$ ومنها يحدث

حم : ءم :: هم : وم و √حم : √ءم :: √هم : √وم

(في المتواليات العددية)

(٩٤) كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد احدها عن سابقه او ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية او تفاضلية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية فالمتسلسلتان

١ و ٤ و ٧ و ١٠ و ١٣ و ١٦ و ١٩ و ٢٢ و ٢٥ و
٦٠ و ٥٦ و ٥٢ و ٤٨ و ٤٤ و ٤٠ و ٣٦ و ٣٢ و ٢٨ ،

تسميان متواليتين الا ان الاولى تسمى متوالية عددية تصاعدية اساسها ثلاثة والاخرى تنازلية اساسها اربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية او تنازلية بحسب كون اساسها موجبا او سالبا

واذا رمز بالحروف ح و ء و ه و و ...... الخ لحدود متوالية عددية توضع هكذا

÷ ح . ء . ه . و . ز . ح . ط .... ك . ل

ويلفظ بها ح الى ء كنسبة ء الى ه كنسبة ه الى و الى ... الخ

واذا رمز للاساس بالحرف س وللحد الاول بالحرف ح وللحد الاخير المسبوق بحدود عددها ن ــ ١ بالحرف ل تحصل بمقتضى التعريف

ء=ح+س و ه=ء+س و و=ه+س ... و ل=ك+س أى

ء=ح+س و ه=ح+٢س و و=ح+٣س ... و ل=ح+(ن ــ ١)س

اى ان اى حد من متوالية عددية يساوى الحد الاول مضافا اليه حاصل ضرب عدد الحدود السابقة له فى الاساس

وحيث ان المعادلة ل = ح + (ن ــ ١)س ...... (١)

تشتمل على اربع كميات لا يمكن ادراك احدها الا بعد معرفة الثلاث الاخرى

واذا اريد ادخال جملة حدود عددها م بين اى حدين معلومين بشرط ان يتركب من الجميع متوالية عددية شوهد ان هذه المتوالية لا تحتاج

فى تركبها الالتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القانون (١)

$$س = \frac{ل - ح}{ن - ١}$$

وحيث ان ن = م + ٢ يكون

$$س = \frac{ل - ح}{م + ١}$$

اعنى ان اساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعلومين على عدد الحدود المدخلة زائدا واحدا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع فى المعادلة $س = \frac{ل - ح}{م + ١}$ بدل ل و ح و م مقاديرها وهى ٤٩ و ٤ و ٨ فيحصل $س = \frac{٤٩ - ٤}{٩} = ٥$

اعنى ان الاساس المطلوب يساوى ٥ وحينئذ تركب المتوالية هكذا

÷ ٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفى متوالية يساوى حاصل جمع هذين الطرفين فى المتوالية العددية

÷ ح . ى . هـ . و . ع . ط . ل يحصل

ى = ح + س و ط = ل - س ومنهما يحدث

ى + ط = ح + ل

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

÷ ح . ى . هـ . . . . ل

يحصل بالبناء على ما تقدم

ع = ح + (ح + س) + (ح + ٢ س) . . . + (ح + (ن - ١) س)

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب ولايجاد قانون مختصر عن هذا توضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

ع = ح + (ح + س) + (ح + ٢س) ... + (ل − ٢س) + (ل − س) + ل

ع = ل + (ل − س) + (ل − ٢س) ... + (ح + ٢س) + (ح + س) + ح

وبجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين متحدين فى الرتبة يؤل الى ح + ل يتحصل

٢ع = ح + ل مكررا بقدر عدد الحدود اى

٢ع = (ح + ل) ن ومنها يحدث

ع = ن(ح + ل) / ٢ .... (٢)

اعنى ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكرر بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى القانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المبين بمعادلة (١) آل الى

ع = ن(س(ن − ١) + ٢ح) / ٢

(٩٦) تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة القانونين (١) و(٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ح و س و ن و ل و ع الداخلة فى القانونين (١) و (٢) امكن تعيين الاثنين الاخريين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها مجهولا يحدث عشر مسائل سهلة الحل لانه يتحصل دائما معادلتان ذاتا مجهولين

وهاك جدولا يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد ممارسة ذلك

عدد المسائل	معاليم	مجاهيل	معادلات الحل	
١	ح و س و د	ل و ع	ل = ح + (د − ١) س	و ع = ١/٢ د (٢ ح + (د − ١) س)
٢	ع و س و د	ح و ل	ح = ع/د − (د − ١) س/٢	و ل = ع/د + (د − ١) س/٢
٣	ل و س و د	ح و ع	ح = ل − (د − ١) س	و ع = ١/٢ د (٢ ل − (د − ١) س)
٤	ح و ل و د	ع و س	ع = ١/٢ د (ح + ل)	و س = (ل − ح)/(د − ١)
٥	ح و ع و د	ل و س	ل = ٢ع/د − ح	و س = ٢ (ع − د ح)/(د (د − ١))
٦	ل و ع و د	ح و س	ح = ٢ع/د − ل	و س = ٢ (د ل − ع)/(د (د − ١))
٧	ح و ل و س	د و ع	د = (ل − ح)/س + ١	و ع = ١/٢ (ل + ح) ((ل − ح)/س + ١)
٨	ح و ع و س	د و ل	د = (س − ٢ ح ± √((٢ ح − س)² + ٨ س ع))/(٢ س)	و ل = ح + (د − ١) س
٩	ل و س و ع	د و ح	د = (س + ٢ ل ± √((٢ ل + س)² − ٨ س ع))/(٢ س)	و ح = ل − (د − ١) س
١٠	ح و ل و ع	د و س	د = ٢ع/(ل + ح)	و س = (ل² − ح²)/(٢ ع − (ل + ح))

(مسائل يطلب حلها من الطلبة)

(٩٧) الاولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الاخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٢٢٣١

الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية
÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة ان يطلب معرفة عدد طابور مثلث صفه الاول نفر واحد والثانى نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد انفاره مساويا ٥٥

الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية
÷ ١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ ... ١٠٠٠ التى عدد حدودها ٥٥

الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ ميترا وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عربانه كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانه الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربانة الاخيرة الى المحل الذى شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربانات فى ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الايام التى تمضى من ابتداء سيرهما الى نقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

(فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية)

(٩٨) كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتالية خارج قسمة احدها على سابقه ثابت وكل حد منها مساو لسابقه مضروبا فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

وبمقتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدية او تنازلية بحسب اساسها اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

∵ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدية

والمتوالية

∵ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$: $\frac{١}{١٦}$: $\frac{١}{٦٤}$ تنازلية

ويلفظ بها كالتلفظ بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

∵ ح : ى : ه : و : ر : ح : ط : .... ل

فاذا رمز بالحرف س لاساسها وبالحرف ل لحدها الاخير المسبوق بحدود عددها ن ــ ١ تحصل

$ى = ح س$ و $ه = ح س^{٢}$ و $ر = ح س^{٣}$ ..... و $ل = ح س^{ن-١}$

وحيث ان القانون $ل = ح س^{ن-١}$ ...... (١) مشتمل على الكميات الاربع ح و س و ن و ل يمكن تعيين احداها بمعرفة الثلاث الاخرى فاذن يكون الحد الاخير من متوالية هندسية مساويا لحاصل ضرب الحد الاول فى الاساس مرفوعا لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له

فاذا اريد مثلا تعيين الحد الثامن من المتوالية

∵ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤

يحصل $٢ \times ٣^{٧} = ٢ \times ٢١٨٧ = ٤٣٧٤$ وهو الحد الثامن المطلوب

واذا اريد تعيين الحد الثانى عشر من المتوالية

∵ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$ فانه يحصل

$(٦٤ \times \frac{١}{٤})^{١١} = \frac{٤^{٣}}{٤^{١١}} = \frac{١}{٤^{٨}} = \frac{١}{٦٥٥٣٦}$ وهو الحد الثانى عشر المطلوب

ويستعمل القانون $ل = ح س^{ن-١}$ لادخال جملة حدود عددها م بين كميتين معلومتين ح و ل لتتركب من الكل متوالية هندسية وحيث ان عدد الحدود المدخلة م يكون عدد حدود المتوالية المراد تحصيلها

م + ٢ ويكون الحد الاخير منها ل = ح $س^{م+٢-١}$ = ح $س^{م+١}$ ومن هنا يستخرج الاساس المجهول س فيكون

$$س = \sqrt[م+١]{\frac{ل}{ح}}$$

اعنى ان الاساس يساوى جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما بدرجة تساوى م + ١

فاذا اريد مثلا ادخال اربعة حدود بين العددين ٢ و ٤٨٦ يوضع فى مقدار س بدل م و ل و ح مقاديرها وهى ٤ و ٤٨٦ و ٢ فيؤل الى $س = \sqrt[٥]{\frac{٤٨٦}{٢}} = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$ فحينئذ تركب المتوالية هكذا

∺ ٢ : ٢ × ٣ : ٢ × $٣^{٢}$: ٢ × $٣^{٣}$: ٢ × $٣^{٤}$: ٢ × $٣^{٥}$ اى

∺ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦

(٩٩) حاصل ضرب كل حدين متماثلى الوضع من طرفى متوالية هندسية واحد لانه من المتوالية

∺ ح : ء : هـ : و : ع : ط يحدث

ء = ح × س و ع × س = ط ومنها ينتج

ء × ع × س = ط × ح × س اى

ء × ع = ط × ح

وقس على ذلك حواصل باقى الحدود

(١٠٠) حاصل جمع حدود متوالية هندسية يساوى بعد الرمز له بالحرف

ع = ح + ح س + ح $س^{٢}$ + ح $س^{٣}$ + . . . + ح $س^{ن-١}$ . . . .)

وتحويل هذه المعادلة الى اخصر منه يضرب كل من طرفيه فى الاساس فيحدث

ع س = ح س + ح $س^{٢}$ + ح $س^{٣}$ + ح $س^{٤}$ + . . . + ح $س^{ن-١}$ + ح $س^{ن}$ . . .)

وبطرح معادلة (١) من معادلة (٢) يحدث

ع (س — ١) = ح سⁿ — ح = ح (سⁿ — ١) ومنها يستخرج

ع = ح (سⁿ — ١) / (س — ١) .... (٣)

واذا وضع ل بدل الحد الاخير الذى مقداره ح سⁿ⁻¹ فى المعادلة (٣) تؤل الى

ع = (ل س — ح) / (س — ١)

اعنى ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الاخير فى الاساس على باقى طرح الواحد من الاساس .

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على الكميات الخمس ح و س و ن و ل و ع اذا علم منها ثلاث لانه حينئذ يمكن تعيين الاثنين الاخريين . الا ان اغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتى كما لو كان احد المجهولين ن الذى هو عدد حدود المتوالية فانه يؤل الامر الى حل معادلة مشتملة على اس مجهول وكما لو كان المجهولان ح و س أو ل و س فانه يؤل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

واذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة ... آل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية ن — ١

واذا كان الاساس س = ١ استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣) لانه يحدث من المعادلة (٣) للمجموع ع مقدار غير معين اى ان ع = ... واما المعادلة (٢) فانها تحدث له مقدارا محدودا اى ان ع = ن ح وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب المشترك للمعادلة (٣) هنا هو (س — ١) انظر (بند ٥١)

(١٠٢) متى كان الاساس المرموز له بالحرف س اصغر من الواحد

اى كسرا صارت المتوالية تنازلية فحينئذ قانون (٣) يكتب هكذا

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}(1-\text{س}^{\text{ن}})}{1-\text{س}} = \frac{\text{ح}}{1-\text{س}} - \frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$$

فيشاهد من فرض $\text{س} < 1$ انه اذا ازداد العدد ن شيأ فشيأ نقصت الكمية $\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$ كذلك وعليه فيمكن اخذ العدد ن كبيرا بحيث يكون المقدار $\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$ اقل من كل كمية معلومة فعلى ذلك كلما اخذت حدود اكثر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الاول قرب مقدار ع من $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ فاذن يمكن اخذ حدود كافية ليكون حاصل جمعها مختلفا عن $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ بقدر ما يراد وعليه فيقال ان نهاية حاصل جمع جملة حدود من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الاول تكون مساوية للكسر $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهائيا كان حاصل جمعها مساويا $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ اى ان حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائى يساوى خارج قسمة حدها الاول على فاضل الواحد والاساس

(١٠٣) ويمكن تعيين هذا الحاصل من اول الامر بفرض المتوالية التنازلية التى عدد حدودها لانهائى هكذا

$\div$ ح : ء : هـ : و .... الخ ومنها يحدث

$$\text{ء} = \text{ح}\,\text{س} \quad \text{و} \quad \text{هـ} = \text{ء}\,\text{س} \quad \text{و} \quad \text{و} = \text{هـ}\,\text{س} \quad \text{و} \quad \ldots\ldots \text{ الخ}$$

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يحصل

$$\text{ء} + \text{هـ} + \text{و} + \ldots\ldots \text{ الخ} = (\text{ح} + \text{ء} + \text{هـ} + \ldots\ldots \text{ الخ})\,\text{س}$$

وحيث ان الطرف الاول من هذه المتساوية يساوي حاصل جمع حدود المتوالية المذكورة ماعدا الحد الاول اى يساوى $\text{ع} - \text{ح}$ وان الطرف الثانى يساوى مجموع حدودها مكررا بقدر الاساس س اى يساوى ع س يكون $\text{ع} - \text{ح} = \text{ع}\,\text{س}$ او $\text{ع}(1-\text{س}) = \text{ح}$ ومنها يحدث

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لانه اذا اجريت عملية القسمة

على المقدار $\frac{ح}{١-س}$ حدث بين ح : حس : حس٢ : حس٣ : .... الخ
وهو ناتج غير مخالف للمتوالية ‫:: ح : د : هـ : و : .... الخ
المفروضة الا فى تبديل الحدود ح و د و هـ .... الخ بمقاديرها
المبينة بدالة الحد الاول والاساس

(١٠٤) يمكن تعيين كسر اعتيادى مكافئ لكسر دائر بسيط بواسطة القانون المعد لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية لان الكسر الدائر البسيط

٠,٣٢٤٣٢٤٣٢٤٣٢٤ مثلا يمكن وضعه بهذه الصورة

$$\frac{٣٢٤}{١٠^{٣}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٦}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٩}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{١٢}} + \ldots\ldots\ldots \text{ الخ}$$

فقد آل الكسر المذكور حينئذ الى متوالية تنازلية غير منتهية مجموع حدودها ع $= \frac{٣٢٤}{١٠٠٠} \div \left(١ - \frac{١}{١٠٠٠}\right) = \frac{٣٢٤}{٩٩٩}$ وهو كسر الاعتيادى المكافئ للكسر الدائر البسيط المفروض

ويمكن تعيين كسر اعتيادى مكافئ لكسر دائر مركب بواسطة قانون المعد لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية وذلك ان الكسر الدائر المركب ٠,٥٧٣٢٤٣٢٤٣٢٤ يكون اصغر من ٥٧,٣٢٤٣٢٤٣٢٤ اى من $٥٧ + \frac{٣٢٤}{٩٩٩}$ مائة مرة فاذن يكون الكسر الدائر المركب مساويا للاعتيادى

$$\frac{٥٧ \times ٩٩٩ + ٣٢٤}{٩٩٩٠٠} = \frac{٥٧(١٠٠٠ - ١) + ٣٢٤}{٩٩٩٠٠} = \frac{٥٧٣٢٤ - ٥٧}{٩٩٩٠٠}$$

(مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية)

(١٠٥) يروى لما اخترع مخترع الشطرنج فى طلب جائزة اختار ان يوضع له فى الخانة الاولى حبة وفى الثانية حبتان وفى الثالثة اربع وفى الرابعة ثمان وهكذا اى ان يوضع فى كل خانة ضعف سابقتها الى الاربع والستين خانة فتصاعد الحب الذى يأخذه المخترع المذكور

فالجواب ان عدد الحب المطلوب يساوى حاصل جمع حدود متوالية هندسية معلوم منها ح = ١ و س = ٢ و ن = ٦٤ فاذن يكون

$$ع = \frac{ح(س^{ن} - ١)}{س - ١} = \frac{٢^{٦٤} - ١}{٢ - ١} = ٢^{٦٤} - ١ = ١٨٤٤٨٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥$$

ومن المعلوم فى التجاريب ان المريا جرام اى العشرة آلاف جرام تساوى ٢٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار ع مساويا ٧٠٦٧٧١٨٠٣٥٩٠٤٠ ميريا جراما وحيث كان ثمن المريا جرام يساوى فرنكين يكون ثمن ما يأخذه المخترع مساويا ١٤١٣٥٤٣٦٠٧١٨٠٨٠ فرنكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر فى مرض موته عبد الله فوهبه الآخر فى مرض موته للاول ولا شئ لهما سواه وحيث ان هبة مرض الموت لا تنفذ الا فى الثلث ان كانت لغير وارث اوله واجازها باقى الورثة يكون للموهوب له $\frac{١}{٣}$ العبد وللواهب ثلثاه وبهبته الموهوب له يرجع للواهب من هذا الثلث ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له ومتى زادت هبة الموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا فاذن يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلا من المريضين فى العبد المذكور.

فالجواب ان يفرض ثمن العبد او نفسه مساويا للواحد فيكون مقدار ما وهبه الاول منه مساويا $\frac{١}{٣}$ ومقدار هبة الموهوب له مساوية ثلث الثلث وبناء عليه تكون حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩}$ وحصة الموهوب له $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩}$ وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث اى $\frac{١}{٩}$ يرجع للواهب الثانى ثلث $\frac{١}{٩}$ اى $\frac{١}{٢٧}$ فاذن تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧}$

وحيث زد مال الواهب الثانى بمقدار ثلث التسع اى $\frac{١}{٢٧}$ يرجع للواهب الاول منها ثلثها وهو $\frac{١}{٨١}$ فاذن تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٩}-\frac{١}{٢٧}+\frac{١}{٨١}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣}-\frac{١}{٩}+\frac{١}{٢٧}-\frac{١}{٨١}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{١}{٨١}$ من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه اى $\frac{١}{٢٤٣}$ وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٩}-\frac{١}{٢٧}+\frac{١}{٨١}-\frac{١}{٢٤٣}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣}-\frac{١}{٩}+\frac{١}{٢٧}-\frac{١}{٨١}+\frac{١}{٢٤٣}$ وهكذا

فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذن تكون حصة كل منهما مساوية لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليتين غير نهائيتين فتواليتا الواهب الثانى

$\because \frac{١}{٣} : \frac{١}{٢٧} : \frac{١}{٢٤٣} : \ldots$ الخ و $\because \frac{١}{٩} : \frac{١}{٨١} : \ldots$ الخ

ومنها ينتج ان حصته الحقيقية مساوية $\frac{٣}{٨}-\frac{١}{٨}=\frac{٢}{٨}=\frac{١}{٤}$ فتنزل الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى ربع وبناء عليه تكون حصة الواهب الاول ثلاثة ارباع

فلتعيين حصة الواهب الاول يجرى العمل المذكور فى تعيين حصة الواهب الثانى

الثالثة احد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفع له فى كل واحدة ١٥٠ غرشا مرة واحدة ثم دفع له فى ادناها ثمن قدره خمسة غروش وفيما فوقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربح البيعين

(فالجواب ان البيع الثانى اربح)

الرابعة برميل من الخل يحتوى على مائة اقه صار يؤخذ منه كل يوم اقة واحدة ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا الفعل حتى لا يبقى من الخل الا الربع

(فالجواب انه لابد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

(فى اللوغاريتم)

(١٠٦) قبل الشروع فى الخواص العمومية للوغاريتم واستعماله

فى العمليات الحسابية نذكر نظرية هى ان جميع الاعداد تنتج من قوى عدد موجب اكبر من الواحد او اصغر منه بيان ذلك ان يقال

اولا اذا ارمز بالرمز ح لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت القوى المتوالية $ح^{٠}$ و $ح^{١}$ و $ح^{٢}$ و $ح^{٣}$ الخ حدث من ذلك جملة اعداد لا تزال اخذة فى الزيادة الى غير نهاية ومتقاربة من بعضها كلما تقاربت اسس هذه القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ انه اذا ارمز بالرمزين س و ص لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة $ص = ح^{س}$ وفرض للمتغير س جملة مقادير متقاربة من بعضها من ابتداء الصفر الى $+ \infty$ كان للمتغير ص جملة مقادير متقاربة من بعضها بحيث اذا زاد س بكيفية متوالية من ابتداء الصفر الى $+ \infty$ اخذ س جميع المقادير من الواحد الى $+ \infty$ واذا فرض للمتغير س مقادير سالبة بان كان $س = - سَ$ الت المعادلة المتقدمة الى

$$ص = ح^{-سَ} = \frac{١}{ح^{سَ}}$$

واذا فرض ان سَ ياخذ مقادير من ابتداء الصفر الى $+ \infty$ فان $ح^{سَ}$ ياخذ مقادير من ابتداء الواحد الى $+ \infty$ وحينئذ ياخذ $\frac{١}{ح^{سَ}}$ مقادير من ابتداء الواحد الى $\frac{١}{\infty}$ اى الى الصفر

وثانيا اذا فرض ان ح يدل على عدد دون الواحد مبين بالكسر $\frac{١}{ى}$ (بفرض ى عددا اكبر من الواحد) نؤل المعادلة $ص = ح^{س}$ الى $ص = (\frac{١}{ى})^{س} = \frac{١}{ى^{س}}$ فاذا اخذ س جميع المقادير من ابتداء الصفر الى $+ \infty$ اخذ $ى^{س}$

جميع

جميع الاعداد من الواحد الى $+\infty$ فحينئذ تكون جميع مقادير ص محصورة بين الواحد والصفر واذا اخذ المتغير س مقادير من ابتداء الصفر الى $-\infty$ اخذ $ء^{س}$ جميع الاعداد المحصورة بين الواحد والصفر فحينئذ يكون للمتغير ص جميع الاعداد من ابتداء الواحد الى $+\infty$

(١٠٧) حيث تقرر انه يمكن تكوين جميع الاعداد من القوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغاريتم هذه الاعداد على اسس القوى المتنوعة المذكورة المساوية لجميع الاعداد بالتناظر وحينئذ يكون كل مقدار للمتغير س في المعادلة $ص = ح^{س}$ لوغاريتم المقدار المطابق له من مقادير ص (بفرض ح عددا موجبا ويسمى اساس الجملة اللوغاريتمية) و يوضع $س = لوغا\ ص$

(١٠٨) اذا فرض ان ص و $ص'$ و $ص''$ و ... الخ رموز لاعداد و س و $س'$ و $س''$ و ... الخ رموز لوغاريتماتها بالنسبة لجملة اساسها ح حدث

$$ص = ح^{س} \text{ و } ص' = ح^{س'} \text{ و } ص'' = ح^{س''} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\frac{ص}{ص'} = ح^{س - س'} \text{ و } ص^{م} = ح^{م س} \text{ و } \sqrt[م]{ص} = ح^{\frac{س}{م}}$$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الاسس

$$ص \times ص' \times ص'' \dots \text{الخ} = ح^{س + س' + س'' \dots \text{الخ}} \text{ ومنه يحدث}$$

$$لوغا\ (ص\ ص'\ ص'' \dots \text{الخ}) = س + س' + س'' + \dots \text{الخ} \text{ و}$$

$$لوغا\ \frac{ص}{ص'} = س - س' \text{ و } لوغا\ ص^{م} = م\ س \text{ و } لوغا\ \sqrt[م]{ص} = \frac{س}{م}$$

فحينئذ يكون $\text{لوغا}\ \text{ص}\ \text{ص}'\ \text{ص}''\ \ldots\ \text{الخ} = \text{لوغا}\ \text{ص}$
$+ \text{لوغا}\ \text{ص}' + \text{لوغا}\ \text{ص}'' + \ldots\ \text{الخ}$

و $\text{لوغا}\ \frac{\text{ص}}{\text{ص}'} = \text{لوغا}\ \text{ص} - \text{لوغا}\ \text{ص}'$

و $\text{لوغا}\ \text{ص}^{\text{م}} = \text{م}\ \text{لوغا}\ \text{ص}$ و $\text{لوغا}\ \sqrt[\text{م}]{\text{ص}} = \frac{\text{لوغا}\ \text{ص}}{\text{م}}$

وهذه المتساويات الاربع تستنبط منها قواعد

الاولى ان لوغاريتم حاصل ضرب يكون مساويا لمجموع لوغاريتمات مضاريبه

الثانية ان لوغاريتم خارج قسمة عددين يكون مساويا للوغاريتم المقسوم مطروحا منه لوغاريتم المقسوم عليه

الثالثة ان لوغاريتم اى قوة لاى عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضروبا فى درجة القوة المذكورة

الرابعة ان لوغاريتم جذر اى عدد يكون مساو للوغاريتم هذا العدد مقسوما على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتم اى كسر يكون مساويا للوغاريتم بسطه مطروحا منه لوغاريتم مقامه وينتج من القاعدتين الاولين ان لوغاريتم الحد الرابع من متناسبة يكون مساويا لمجموع لوغاريتمى الوسطين مطروحا منه لوغاريتم الحد الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريفى اللوغاريتم ومما تقدم فى (بند ١٠٦)

اولا ان الاساس فى كل جملة لوغاريتمية يكون مساويا للواحد ويكون لوغاريتم الواحد مساويا للصفر

وثانيا ان الاساس اذا كان اكبر من الواحد كانت لوغاريتمات الاعداد التى فوق الواحد موجبة ولوغاريتمات الاعداد التى دون الواحد سالبة ولوغاريتم الصفر $- \infty$

وثالثا اذا كان الاساس دون الواحد كانت لوغاريتمات الاعداد التي فوق الواحد سالبة ولوغاريتمات الاعداد التي دون الواحد موجبة ولوغاريتم الصفر + ∞

(١١٠) حيث ان اللوغاريتمات لا تستعمل عادة الا لاختصار الاعمال الرقمية فلا يعتبر هنا غير لوغاريتمات الاعداد الموجبة ويفرض دائما ان الاساس يكون موجبا وحينئذ لا يكون للاعداد السالبة لوغاريتمات صحيحة

(١١١) اذا فرضت متوالية هندسية حدها الاول الواحد واساسها كمية تختلف عن الواحد بقليل وحدودها تاخذ في الزيادة بمقادير صغيرة جدا تكاد لا تدرك بحيث تكون محتوية على جميع الاعداد وفرضت ايضا متوالية عددية حدها الاول الصفر واساسها كمية صغيرة جدا تكاد لا تدرك باعتبارها تين المتواليتين مكتوبتين على وجه به تكون حدود المتوالية العددية موضوعة تحت حدود المتوالية الهندسية ويكون صفر المتوالية العددية محاذيا للحد (١) من المتوالية الهندسية كان كل حد من حدود المتوالية العددية لوغاريتم الحد المحاذي له من المتوالية الهندسية لان حدود المتوالية الهندسية عبارة عن القوى المتنوعة المتناهية من بعضها جدا لاساسها وحدود المتوالية العددية عبارة عن اسس تلك القوى وصورة وضع المتواليتين هكذا

∵ ... $ك^{-3}$: $ك^{-2}$: $ك^{-1}$: ١ : ك : $ك^{2}$: $ك^{3}$: ... الخ

÷ ... ‎-٣ . ‎-٢ . ‎-١ . صفر . ١ . ٢ . ٣ . ... الخ

(في اللوغاريتمات التي اساسها ١٠)

(واستعمال الجداول اللوغاريتمية)

(١١٢) بمقتضى ما تقرر اذا تكونت جميع قوى عدد ١٠ فان للاعداد ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠ و ... الخ تكون لوغاريتماتها ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ... الخ واما لوغاريتمات

الاعداد التى ليست من القوى الصحيحة لعدد ١٠ فانها تتعين بعدد اعشارى واما الجزء الصحيح للوغاريتم عددا كبر من الواحد فانه يحتوى على عدة من الآحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا اذا رمزنا لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز ى كان العدد محصورا بين $١٠^{ى-١}$ و $١٠^{ى}$ وبناء على ذلك يكون لوغاريتمه محصورا بين ى — ١ و ى وحينئذ يكون مركبا من آحاد عددها ى — ١ ومن جزء اعشارى اقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغاريتم اسم العدد البيانى

(فى المتمم اللوغاريتمى)

المتمم اللوغاريتمى لعدد هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين مقلوب الآخر متى كان حاصل ضربهما مساويا للواحد فنحو ٣ او $\frac{٣}{١}$ و $\frac{١}{٣}$ يقال لكل منهما مقلوب الآخر وعليه اذا رمزنا بالرمز ح لعدد مقلوبه $\frac{١}{ح}$ يحدث

$$ح \times \frac{١}{ح} = ١$$

وباخذ لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

$$\text{لوغا } ح + \text{لوغا } \frac{١}{ح} = \text{لوغا } ١ = ٠$$ ومنها يؤخذ

$$\text{لوغا } \frac{١}{ح} = - \text{لوغا } ح$$

اعنى ان المتمم اللوغاريتمى لعدد يساوى لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته وحيث ان الجداول اللوغاريتمية لا تحتوى الا على لوغاريتمات الاعداد الصحيحة يلزم لايجاد لوغاريتم كسران تطبق عليه القاعدة المتقدمة فى (بند ١٠٨) ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد امكن تعيين لوغاريتمه السالب على وجه به يكون جزؤه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار على لوغاريتم البسط عدد من الآحاد حتى يتيسر ان يطرح منه لوغاريتم المقام ويطرح هذا العدد من الباقى مثال ذلك ان يكون لوغاريتم البسط ٣،٤٩٥٨٦٣ و لوغاريتم المقام ٣،٥٨٤٢٧٦١ فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم الثانى من الاول بعد أن يضاف اليه ٣ فيحدث ٠٫٧٦٥٣١٠١
وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقى يكتب هكذا

$\overline{٣}$٫٧٦٥٣١٠١

والعلامة — الموضوعة فوق العدد البيانى لا تتعلق بغيره

فاذا اريد تغيير المقدار ١٠١ ٧٦٥٣ ٫ $\overline{٣}$ بآخر مكافى له الا انه سالب

شوهد ان ٧٦٥٣١٠١ ٫ $\overline{٣}$ = — ٣ + ٠٫٧٦٥٣١٠١ =
— ٢ — (١ — ٠٫٧٦٥٣١٠١) = — ٢٫٢٣٤٦٨٩٩ وهذا
التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد البيانى وطرح الرقم
الاول عن يمين الجزء الاعشارى من ١٠ وباقى الارقام الاعشارية
من ٩

ويلزم لتحويل لوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشارى موجب
(اى الى المتمم اللوغاريتمى) ان يجرى على الجزء الاعشارى من اللوغاريتم
السالب ما اجرى عليه فى الحالة السابقة ويضاف الى العدد البيانى واحد لان
— ٢٫٢٣٤٦٨٩٩ = — ٢ — ٠٫٢٣٤٦٨٩٩ =
— ٣ + (١ — ٠٫٢٣٤٦٨٩٩) = $\overline{٣}$٫٧٦٥٣١٠١

واذا اريد ضرب اللوغاريتم ٧٦٥٣١٠١ ٫ $\overline{٣}$ فى عدد صحيح كعدد
٤ مثلا فان حاصل الضرب يكتب هكذا

٤ × ٠٫٧٦٥٣١٠١ + ٤ × — ٣ أو ٣٫٠٦١٢٤٠٤ — ١٢ = $\overline{٩}$٫٠٦١٢٤٠٤ ومتى
كان اللوغاريتم مركبا من عدد بيانى سالب وجزء اعشارى موجب واريد
قسمته على عدد صحيح لزم ان يؤخذ خارج قسمة العدد البيانى على وجه به
يكون الباقى موجبا مثل ذلك لو قسم $\overline{٧}$٫٣٣٩٥٦٤٣ على ٣ فيكون
خارج قسمة — ٧ على ٣ هو — ٢ والباقى — ١ وخارج قسمة

$\overline{3}$ والباقى + ٢ وبادامة العمل يحدث ٣،٧٧٦٥٢١٤
وهو الناتج المطلوب

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة فى (بند ١٠٨) ان

لوغا (ح × ١٠^ء) = لوغا ح + لوغا ١٠^ء = لوغا ح + ء و

لوغا (ح / ١٠^ء) = لوغا ح ـ لوغا ١٠^ء = لوغا ح ـ ء

ومن هنا ينتج ان لوغاريتم حاصل ضرب عدد فى القوى الصحيحة لعدد ١٠ او خارج قسمته عليه يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضافا اليه او مطروحا منه آحاد صحيحة بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

وحينئذ يسهل معرفة العدد البيانى للوغاريتم عدد اعشارى اصغر من الواحد لانه اذا رمز بالرمز ع لعدد الاصفار الموجودة بين الشرطة واول رقم معنوى يوجد عن يمينها كان العدد المفروض اصغر من ١/١٠^ع واكبر من ١/١٠^(ع+١) وحينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد محصورا بين ـ ع و ـ(ع+١) اعنى ان هذا اللوغاريتم يكون مساويا ـ (ع + ١) مضافا اليه جزء اعشارى موجب او مساويا ـ ع مضافا اليه جزء اعشارى سالب ومن هنا ينتج

اولا انه متى كان الجزء الاعشارى للوغاريتم عدد اعشارى اصغر من الواحد موجبا كان عدده البيانى مساويا للعدد الدال على مرتبة اول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة من العدد المفروض

وثانيا انه متى كان اللوغاريتم سالبا بالكلية كان عدده البيانى اقل بواحد من العدد الدال على مرتبة اول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة فى العدد المفروض وعلى ذلك يكون العدد البيانى الموجب او السالب للوغاريتم دالا على اعظم احاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغاريتم

فى استعمال

استعمال الجداول اللوغاريتمية

في العمليات الحسابية

(١١٤) استعمال هذه الجداول في العمليات الحسابية يرجع الى مسألتين

(الاولى) ان يكون المعلوم عددا والمطلوب ايجاد لوغاريتمه

(الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب ايجاد هذا العدد

ويكفي في ذلك ان نشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المسئلتان المذكورتان فنقول

(في شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله)

(١١٥) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثمانين صحيفة كل صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالي بلفظتي اعداد وانساب اي لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل على خمسة اعداد والصف المعنون بلفظة انساب يوجد تلو الصف المعنون بلفظة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار العدد المنسوب اليه من الثاني وجميع اعداد الصف المعنون بلفظة انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار العدد البياني والارقام السبعة الباقية هي الجزء الاعشاري من اللوغاريتم وجميع الاعداد البيانية هي الارقام الموضوعة في كل صف تحت العلامة ⌣ الموضوعة تحت لفظة انساب في رأس كل صف من جهة اليسار ولنشرع في تطبيق الجدول المذكور على المسألتين المذكورتين فنقول

(المسئلة الاولى العملية)

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم ينظر اولا اذا كان العدد المعلوم صحيحا او صفرا من ١٠٠٨٠ فانه يبحث عنه في الصف المعنون بلفظة اعداد ويؤخذ العدد الذي هو الذي يوجد على يساره من الصف المعنون بلفظة انساب فيكون هذا العدد هو لوغاريتمه

المطلوب

مثال ذلك ان يكون العدد المفروض ٤٥١٧ فيبحث عنه فى الصفوف المعنونة بلفظة اعداد فيشاهد انه العدد الثانى من اعداد القسم الثامن من الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صحيفة ٣٩) وحينئذ يكون العدد ٣٫٦٥٤٨٥٠١ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب الذى يوضع هكذا لوغا ٤٥١٧ = ٣٫٦٥٤٨٥٠١ فحينئذ يكون لوغا ١٠ = ١٫٠٠٠٠٠٠٠ ولوغا ٣١٥ = ٢٫٤٩٨٣١٠٦

ولوغا ١٥ = ١٫١٧٦٠٩١٣ ولوغا ٨٩١٥ = ٣٫٩٥٠١٢١٣

وثانيا اذا كان العدد المعلوم صحيحا واكبر من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى عدد اعشارى محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال حيث ان ١٨٩٣٦٧ = ١٨٩٣٫٦٧ × ١٠٠ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بند ١١٣) مساويا للوغاريتم العدد ١٨٩٣٫٦٧ مضافا اليه العدد ٢ وبناء على ذلك يكفى لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٫٦٧ بهذه الكيفية وهى ان يقال

حيث ان العدد ١٨٩٣٫٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين الجدوليين ٣٫٢٧٧١٥٠٦ و ٣٫٢٧٧٢٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ثم انه يلزم ايجاد الكمية س التى يراد اضافتها الى اللوغاريتم ٣٫٢٧٧١٥٠٦ المنسوب للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣٫٦٧ بان يؤخذ الفرق ٠٫٠٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدوليين المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣٫٦٧ الى الفرق ٠٫٦٧ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣٫٦٧ كنسبة الفرق ٠٫٠٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدوليين المنسوبين للعددين

الحاصرين بينهما العدد المعلوم الى الفرق س بين اصغر اللوغارتيمين الجدولين واللوغاريتم المطلوب اعنى

١ : ٦٧ر٠ :: ٢٢٩٤ ٠٠٠ر٠ : س فحينئذ يكون س = ١٥٣٧ ٠٠٠٠ر٠

ثم يضاف مقدار س الى اللوغاريتم ١٥٠٦ ٣٢٧٧ر٣ المنسوب للعدد ١٨٩٣ فالمجموع ٣٠٤٣ ٢٧٧ر٣ يكون لوغاريتما للعدد ١٨٩٣٦٧ر٠ فحينئذ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هو ٢٧٧٣٠٤٣ر٥ وبهذه المثابة يتعين لوغاريتم اى عدد صحيح

وثالثا اذا اريد تعيين لوغاريتم كسر اعتيادى لزم ان يطرح لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام كما تقدم فى (بند ١٠٨)

لكن اذا كان الكسر اكبر من الواحد اجريت عملية الطرح كما ذكر فيكون الباقى هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان الكسر دون الواحد لزم ان يطرح لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن الباقى بعلامة ـــ فيكون الناتج لوغاريتما للكسر المفروض

تنبيه * اذا كان المطروح اكبر من المطروح منه وجب ان يطرح الاصغر من الاكبر ثم يقرن الباقى بعلامة ـــ فبناء على ذلك يكون

لوغا $\frac{١٥}{٧}$ = ٣٣٠٩٩٢٣ر٠ و لوغا $\frac{٧}{١٥}$ = ـــ ٣٣٠٩٩٢٣ر٠

ورابعا اذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم عدد اعشارى يتحصل حيث ان العدد الاعشارى يكافى كسرا اعتياديا بسطه عدد صحيح حادث من تجريد العدد المفروض من الشرطة ومقامه واحد متبوع بعدد من الاصفار عدده كعدد الارقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطة فبمقتضى ما تقرر فى تعيين لوغاريتم كسر اعتيادى يلزم تحصيل لوغاريتم عدد اعشارى ان يطرح لوغاريتم العدد الصحيح الحادث من حذف شرطة العدد المفروض و ... آحاد بقدر الارقام الاعشارية الموجودة فى العدد المفروض ... لوغاريتم الواحد المتبوع بجملة اصفار هو عدد الاصفار المذكورة فى (بند ١١٣)

لكن اذا كان العدد الاعشارى المفروض اكبر من الواحد كان لوغاريتمه موجبا فاذا كان المطلوب مثلا تعيين لوغاريتم العدد ١٨ر٩٣٦٧ لزم ان يبحث عن اللوغاريتم ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ المنسوب للعدد ١٨٩٣٦٧ ويطرح منه الرقم ٤ فيكون الباقى ١ر٢٧٧٣٠٤٣ هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان العدد الاعشارى المفروض اصغر من الواحد كان لوغاريتمه سالبا فاذا كان المطلوب مثلا تعيين لوغاريتم العدد ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧ لزم ان يقطع النظر فى مبدأ الامر عن الشرطة ويبحث عن لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيكون ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ وحيث ان العدد المعلوم مركب من ثمانية ارقام اعشارية يلزم لتحصيل لوغاريتمه ان يطرح من اللوغاريتم ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ الرقم ٨ وبناء على ذلك يكون العدد ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ — ٨ هو اللوغاريتم المطلوب ويلزم لايجاد الباقى المذكور ان يطرح ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ من ٨ ويقرن الباقى بعلامة — فيكون الناتج — ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ هو لوغاريتم العدد ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧

ويمكن ايضا كما فى (بند ١١٢) تحويل اللوغاريتم — ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ الى لوغاريتم عدده البيانى سالب فقط بملاحظة ان لوغا ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧ = ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ — ٨ = ٥ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ — ٨ = ٥ — ٨ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ = —٣ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ = ٣̄ر٢٧٧٣٠٤٣

والعلامة — الموضوعة فوق العدد ٣ تدل على انه سالب فقط

(المسئلة الثانية العملية)

(١١٧) اذا علم لوغاريتم وكان المطلوب تعيين العدد الذى ينسب اليه يقال اولا اذا كان اللوغاريتم المعلوم موجبا كان العدد المنسوب اليه اكبر من الواحد وحينئذ يكون العدد البيانى بعد ان يضاف اليه واحد دالا كما فى (بند ١١٢) على عدد ارقام الجزء الصحيح من العدد المنسوب الى اللوغاريتم المعلوم

اذ تقرر ذلك يقال اذا كان العدد البيانى للوغاريتم معلوم قدره ٣ كان

العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم فى الصفوف المعنونة بلفظة
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور فى الجدول كان العدد المنسوب اليه
موضوعا على يمينه فى الصف المعنون بلفظة اعداد

وبناء على ذلك يشاهد ان اللوغاريتمات ٣٫٦٥٦٠٩٨٢ و ٣٫٢٧٧١٥٠٦
و ٣٫٢٧٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٣
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذى عدده البيانى ٣ ليس موجودا فى الجدول
لزم حصره بين لوغاريتمين متواليين جدوليين منسوبين لعددين صحيحين
متواليين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاعشارى
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاعشارى المنسوب للعدد المطلوب فيتعين بهذه الكيفية وهى ان
يقال نسبة الفرق بين اللوغاريتمين الجدوليين الحاصرين بينهما اللوغاريتم
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدوليين كنسبة
واحد الى الجزء الاعشارى س المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

ومقدار س المستخرج من هذه المناسبة يكون فى العادة مبينا بثلاثة
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شوهد فى الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين لوغاريتمين ٣٫٢٧٧١٥٠٦
و ٣٫٢٧٧٣٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما
الجزء الاعشارى من هذا العدد فيلزم لتعيينه ان يبحث فى مبدأ الامر عن
الفرق ٠٫٠٠٠٢٢٩٤ بين لوغاريتمى العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
ثم عن الفرق ٠٫٠٠٠١٥٣٧ بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين
الجدوليين ثم توضع المناسبة

٢٢٩٤ ٠٠٠٠ر٠ : ١٥٣٧ ٠٠٠٠ر٠ :: ١ : س او
٢٢٩٤ : ١٥٣٧ :: ١ : س

ومنها يحدث س = ٠٦٧٠ر٠

وبناء على ذلك يكون العدد المطلوب هو ١٨٩٣ر٦٧ فاذا زاد العدد البيانى للوغاريتم المعلوم الموجب عن الموجود فى الجدول اونقص عن العدد ٣ لزم تحويله الى الحالة السابقة وذلك بان نطرح من العدد البيانى اوتضاف اليه آحاد الى ان يصير مساويا للرقم ٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب للوغاريتم الجديد (محسوبا مع ثلاثة ارقام اعشارية) ثم تقدم الشرطة اوتؤخر جهة اليمين اواليسار منازل بعدد الآحاد المضافة الى العدد البيانى اوالمطروحة منه فاذا علم اللوغاريتم ١ر٢٧٧٣٠٤٣ مثلا لزم فى مبدأ الامر ان يضاف الرقم ٢ للعدد البيانى ١ فيحدث ٣ر٢٧٧٣٠٤٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب اليه ٣ر٢٧٧٣٠٤٣ فيشاهد انه ١٨٩٣ر٦٧ ثم تقدم الشرطة جهة الشمال منزلتين (لان الرقم ٢ قد أضيف الى العدد البيانى) فيحدث ١٨ر٩٣٦٧ وهو العدد المطلوب

وثانيا اذا كان اللوغاريتم المعلوم كله سالبا لزم ان تضاف احاد كافية لجعل الناتج موجبا عدده البيانى ٣ اعنى انه يلزم ان يضم اليه ٤ آحاد فى النهاية ثم يبحث عن العدد الذى ينسب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الآحاد التى اضيفت الى اللوغاريتم المعلوم فاذا اريد ايجاد العدد الذى ينسب الى اللوغاريتم — ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ السالب مثلا لزم ان يضاف ٢+٤ اى ستة آحاد الى —٢ر٧٢٢٦٩٥٧ فيكون المجموع ٦ — ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ اى ٣ر٢٧٧٣٠٤٣ ثم يبحث عن العدد ١٨٩٣ر٦٧ المنسوب الى اللوغاريتم ٣ر٢٧٧٣٠٤٣ ثم تقدم شرطة جهة اليسار ستة منازل (لاننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المعلوم) فيكون الناتج ٠٠٠١٨٩٣٦٧ر٠ هو العدد المطلوب

وثالثا اذا كان العدد البيانى سالبا لزم ان تضاف اليه احاد كافية لجعله

موجبا ومساويا للرقم ٤ ثم يبحث عن العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الآحاد التي اضيفت الى العدد البياني فاذا اريد ايجاد العدد الذي لوغاريتمه ٣٫٢٧٧٣٠٤٣̄ مثلا نتج مما تقدم ان ٣٫٢٧٧٣٠٤٣̄ = − ٣ + ٠٫٢٧٧٣٠٤٣

وبناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ للوغاريتم المعلوم صار الناتج ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ (لان ٠٫٢٧٧٣٠٤٣ − ٣ بعد اضافة لرقم ٦ اليه يصير ٠٫٢٧٧٣٠٤٣ + ٦ − ٣) ثم يبحث عن العدد الذي ينسب اليه هذا الناتج فيشاهد انه ١٨٩٣٫٦٧ ثم تقدم الشرطة ستة منازل جهة اليسار (لاننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المفروض) فيكون الناتج ٠٫٠٠١٨٩٣٦٧ هو العدد المطلوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المشتمل على لوغاريتمات الاعداد من ١ الى ١٠٠٨٠ واما الجزآن الآخران فلم نتصد لذكرهما هنا لتوقفهما على امور خاصة بعلم حساب المثلثات من اراد الوقوف على حقيقتهما فعليه بالاطلاع على العلم المذكور

(الباب الخامس)

في مسائل يحلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تمرين التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعده

(مسائل تخص الدرجة الاولى)

(المسئلة الاولى)

كومتان من القلل محتويتان على ٣٤٤ قلة تزيد احداهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القلل الموجودة في كلتيهما.

فالجواب عن ذلك ان يفرض س عدد القلل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون س + ٦٤ عدد القلل الموجودة في الكومة الكبرى فبناء على ما تقدم يحصل

س + س + ٦٤ = ٣٤٤ اى

٢ س + ٦٤ = ٣٤٤ ومنها يستخرج

س = ١٤٠ قلة وهو العدد الاصغر.

وحيث كان العدد الاكبر مساويا للكمية س + ٦٤ يكون مساويا للكمية ١٤٠ + ٦٤ المساوية للكمية ٢٠٤ بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤ وتحقيق ذلك ان مجموعهما يساوى ٣٤٤ وفاضلهما يساوى ٦٤

(المسئلة الثانية)

ثلاث قلل عيار الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ وزنة الجميع ١٤٣ كيلوجراما لكن الاولى تزيد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلوجراما والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلوجراما فما تكون زنة كل قلة من القلل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا رمزنا بالحرف س لزنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون س + ٢٩ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات و س + ٢٩ + ٢٢ اى س + ٥١ زنة

القلة التي عيارها ١٢ بوصة وحيث كانت زنة الثلاث قلل تبلغ ١٤٣ كيلوجراما يحدث

س + س + ٢٩ + س + ٥١ = ١٤٣ او

٣ س + ٨٠ = ١٤٣ ومنها يستخرج

س = ٢١

يعني ان زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما فتكون حينئذ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢١ + ٢٩ اى ٥٠ كيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصه ٥٠ + ٢٢ اى ٧٢ كيلوجراما وتحقق ذلك ان زنة الثلاث قلل تساوى ١٤٣ كيلوجراما

(المسئلة الثالثة)

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر قواها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اى ان قوة الاولى على ٣/٥ قوة الثانية وعلى ٣/١١ من قوة الثالثة

فالجواب عن ذلك ان يفرض ان ٣س عدد الخراطيش اللازمة لفرقة الاولى و ٥س عدد خراطيش الثانية و ١١س عدد خراطيش لفرقة الثالثة (وانما اخترنا هذه الفروض لفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣س عبارة عن ٣/٥ العدد ٥س وعن ٣/١١ من العدد ١١س وثاني تناسب هذه الفروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فحيث كان مجموع هذه الاجزاء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

٣س + ٥س + ١١س = ٢١٣٧٥ ى

١٩ س = ٢١٣٧٥ ومنها يستخرج

س = ٢١٣٧٥/١٩ = ١١٢٥

وحينئذ يكون ما يخص فرقة الاولى ٣ × ١١٢٥ اى ٣٣٧٥ خرطوشا وما يخص الثانية ٥×١١٢٥ اى ٥٦٢٥ وما يخص الثالثة

١١ × ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى ٢١٣٧٥ وهاك طريقة اخرى للحل هى

ان يرمز بالحرف س لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون $\frac{٥س}{٣}$ هو عدد خراطيش الفرقة الثانية و $\frac{١١س}{٣}$ عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن ذلك تحدث هذه المعادلة س + $\frac{٥س}{٣}$ + $\frac{١١س}{٣}$ = ٢١٣٧٥ وبحل هذه المعادلة واستخراج مقدار س منها يوجد س = ٣٣٧٥ خرطوشا فحينئذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥.

(المسئلة الرابعة)

اذا كان المطلوب معرفة اللحظات التى يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت الغروب فحينئذ لاحاجة لنا به والغرض انما هو البحث عن التلاقيات الاخر المتتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف هـ للمحيط بتمامه وبالحرف س للمسافة التى قطعها عقرب الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون ١٢س هى المسافة التى قطعها عقرب الدقائق فى الوقت المذكور وهذه المسافة عبارة عن المحيط زائدا المسافة س اعنى ان ١٢س = هـ + س ويستنتج من هذه المعادلة س = $\frac{هـ}{١١}$ وحيث ان عقرب الساعات يقطع المحيط بتمامه فى مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة $\frac{هـ}{١١}$ فى $\frac{١٢}{١١}$ من الساعة اى فى $١\frac{١}{١١}$ ساعه وبناء على ذلك فلحظات التقابلات المتتابعة

من وقت الغروب: $١\frac{١}{١١}$ ساعة، $٢\frac{٢}{١١}$ ساعة، $٣\frac{٣}{١١}$ ساعة، $٤\frac{٤}{١١}$ ساعة، $٥\frac{٥}{١١}$ ساعة

$٦\frac{٦}{١١}$ ساعة، $٧\frac{٧}{١١}$ ساعة، ٨ $\frac{[illegible]}{١١}$ ساعة، $٩\frac{٩}{١١}$ ساعة، ١٠ $\frac{[illegible]}{١١}$ ساعة، $١١\frac{١}{١١}$ ساعة

وهاك بعض مسائل بسيطة لتمرين المبتدى اقتصرنا على بيان نتائج حلها لتحقيق مايجده الطالب

(المسئلة الاولى)

رجل عمره ثمانية امثال عمر ولده ومجموع عمريهما ٣٦ سنة فمايكون عمر كل منهما

فالجواب ان عمر الولد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنه

(المسئلة الثانية)

تلميذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ ١ وان لم يذهب دفع عقابا له ٣٠ فبعد مضي ثلاثين يوما وجد معه ٦ ٣٠ فمايكون قدر ايام البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما كقدر ايام البطالة

(المسئلة الثالثة)

قلتان زنة احديهما ٣٦ رطلا وزنة الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما ٣١٥ مليميترا وفاضلهما ٢١ مليميترا فامقدار كل من القطرين

فالجواب ان قطر الاولى ١٦٨ مليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

(المسئلة الرابعة)

تاجر اشترى مقدارا من الحطب وباعه فاكتسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ معتبرا انه ربح فى كل مائة ١٠ من المبلغ المبيع [illegible] يكون قدر رأس ماله [illegible] اشترى به الحطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠ .

(المسئلة الخامسة)

مخلوط قدره ١٧ رطلا مركب من ١٥ رطلا من [illegible] من الكبريت [illegible] تكون الكمية [illegible] رطلا من [illegible] بحيث يكون موجودا فى كل ١٧ رطلا من [illegible] رطل من الكبريت فقط

فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ رطلا من ملح البارود
ولنذكر مسائل مطبقة على حل معادلتين فاكثر بمجهولين فاكثر

(المسئلة الاولى)

سبيكتان من الدانات احداهما مركبة من ١٢ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٨ دانة عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٤٦٩٫٩٢٥ كيلوجراما والاخرى مركبة من ٢٠ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٥ عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٦٠٦٫٩٨٧ كيلوجراما فما تكون زنة كل دانة منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لزنة الدانة التى عيارها ٨ وبالحرف ص لزنة الدانة التى عيارها ٦ فتحدث هاتان المعادلتان

$$\text{١٢ س} + \text{١٨ ص} = \text{٤٦٩٫٩٢٥} \quad \text{و}$$

$$\text{٢٠ س} + \text{١٥ ص} = \text{٦٠٦٫٩٨٧}$$

ولاستخراج س من هاتين المعادلتين تحذف ص منهما بان يستخرج

من الاولى $\text{ص} = \dfrac{\text{٤٦٩٫٩٢٥} - \text{١٢ س}}{\text{١٨}}$

ومن الثانية $\text{ص} = \dfrac{\text{٦٠٦٫٩٨٧} - \text{٢٠ س}}{\text{١٥}}$

وبتسوية هذين المقدارين ببعضهما تحدث هذه المعادلة

$$\frac{\text{٤٦٩٫٩٢٥} - \text{١٢ س}}{\text{١٨}} = \frac{\text{٦٠٦٫٩٨٧} - \text{٢٠ س}}{\text{١٥}} \quad \text{اى}$$

$\text{٧٠٤٨٫٨٧٥} - \text{١٨٠ س} = \text{١٠٩٢٥٫٧٦٦} - \text{٣٦٠ س}$ ومنها

يستخرج $\text{س} = \dfrac{\text{٣٨٧٦٫٨٩١}}{\text{١٨٠}} = \text{٢١٫٥٣٨}$ كيلوجراما

فاذا وضعنا بدل الحرف س مقداره المستخرج فى المعادلة الاولى ذات المجهولين يحدث

$$\text{ص} = \frac{\text{٤٦٩٫٩٢٥} - \text{٢١٫٥٣٨} \times \text{١٢}}{\text{١٨}} = \frac{\text{٤٦٩٫٩٢٥} - \text{٢٥٨٫٤٥٦}}{\text{١٨}} = \text{١١٫٧٤٨}$$

كيلوجراما

(المسئلة الثانية)

مدفع عياره ١٦ مركب من نحاس وقصدير زنته ٢٠١٠٫٦٤٠ كيلوجراما أو ٢٠١٠٦٤٠ جراما وحجمه ٢٢٣٫ دسيمترا مكعبا

بفرض ان زنة الديسي ميتر المكعب من النحاس يساوى ٩٢٥٠ جراما وزنة الديسيمتر المكعب من القصدير يساوى ٧٣٢٠ جراما فما تكون زنة كل من النحاس والقصدير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لعدد الديسيمترات المكعبة من النحاس وبالحرف ص لعدد الديسيمترات المكعبة من القصدير فيحدث بالنظر للديسيمترات المكعبة هذه المعادلة س + ص = ٢٢٣ ويحدث بالنظر للزنة ٩٢٥٠ س + ٧٣٢٠ ص = ٢٠١٠٦٤٠ ثم يستخرج من المعادلة الاولى س = ٢٢٣ − ص ومن الثانية س = (٢٠١٠٦٤٠ − ٧٣٢٠ ص) ÷ ٩٢٥٠ ومن هاتين المعادلتين يستنتج

(٢٠١٠٦٤٠ − ٧٣٢٠ ص) ÷ ٩٢٥٠ = ٢٢٣ − ص أو

ص = ٥٢١١٠ ÷ ١٩٣٠ = ٢٧

فعلى ذلك يوجد فى المدفع المذكور ٢٧ ديسيمترا مكعبا من القصدير و ٢٢٣ − ٢٧ اى ١٩٦ ديسيمترا مكعبا من النحاس

فاذا ضرب ٩٢٥٠ جراما فى ١٩٦ وجد ان زنة النحاس ١٨١٣٠٠٠ جرام واذا ضرب ٧٣٢٠ جراما فى ٢٧ وجد ان زنة القصدير ١٩٧٦٤٠ جراما ويتحقق ذلك ان زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جراما

(المسئلة الثالثة)

ستمائة اقة من بارود المدافع مكونة من ملح البارود وكبريت وفحم بشرط ان ثلاثة امثال زنة ملح البارود تعادل زنة الفحم ١٣ مرة مضافا عليها خمسة امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة الملح تعادل زنة الكبريت ٣٧ مرة مطروحا منها سبعة امثال زنة الفحم فكم تكون زنة كل من هذه الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لزنة ملح البارود وبالحرف ص لزنة الكبريت كذلك وبالحرف ع لزنة الفحم كذلك فيحدث اولا

س + ص + ع = ٦٠٠

ومن الشرط الاول $\text{٣ س} = \text{٥ ص} + \text{١٣ ع}$

ومن الشرط الثانى $\text{٥ س} = \text{٣٧ ص} - \text{٧ ع}$

وباستخراج س من الاولى والثانية والثالثة يحدث

$$\text{س} = \text{١٠٠} - \text{ص} - \text{ع} \quad \text{و}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٥ ص} + \text{١٣ ع}}{\text{٣}} \quad \text{و}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٣٧ ص} - \text{٧ ع}}{\text{٥}}$$

وبتسوية اول مقدار بثانى مقدار ثم بثالث مقدار للمجهول س يحدث

$$\frac{\text{٥ ص} + \text{١٣ ع}}{\text{٣}} = \text{١٠٠} - \text{ص} - \text{ع} \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{٣٧ ص} - \text{٧ ع}}{\text{٥}} = \text{١٠٠} - \text{ص} - \text{ع}$$

وبحذف المقامات يحدث على التوالى

$$\text{٥ ص} + \text{١٣ ع} = \text{٣٠٠} - \text{٣ ص} - \text{٣ ع} \quad \text{و}$$

$$\text{٣٧ ص} - \text{٧ ع} = \text{٥٠٠} - \text{٥ ص} - \text{٥ ع}$$

وبتحويل الحدود المشتملة على المجهول ص الى طرف واحد يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \text{٨ ص} = \text{٣٠٠} - \text{١٦ ع} \quad \text{و} \\ \text{٤٢ ص} = \text{٥٠٠} + \text{٢ ع} \end{array}\right\} \text{ومنهما يحدث}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{٣٠٠} - \text{١٦ ع}}{\text{٨}} \quad \text{و}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{٥٠٠} + \text{٢ ع}}{\text{٤٢}}$$

وبتسوية مقدارى ص ببعضهما تحدث معادلة تحتوى على المجهول ع فقط يستنتج منها $\text{ع} = \frac{\text{١٠٧٥}}{\text{٨٦}} = \text{١٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ وهو مقدار المجهول المذكور

وبوضع $\text{١٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ بدل المجهول ع فى اول مقدار للمجهول ص يحدث

$$\text{ص} = \frac{\text{٣٠٠} - \text{٢٠٠}}{\text{٨}} = \text{١٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

وبوضع $\text{١٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ بدل كل من المجهولين ص و ع فى اول مقدار للمجهول س يحدث

$$\text{س} = \text{١٠٠} - \text{٢٥} = \text{٧٥}$$

فعلى هذا تكون المائة اقة من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقة من ملح البارود ومن $\frac{1}{2}$١٢ من الكبريت و $\frac{1}{2}$١٢ من الفحم وبناء على ذلك فملح البارود الداخل فى تركيب بارود المدافع يكون $\frac{3}{4}$ المخلوط واما كل من الكبريت والفحم فيكون $\frac{1}{8}$ المخلوط

وهاك مسائل من هذا القبيل يراد حلها من الطلبة

(المسئلة الاولى)

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المسكوكات قيمة بعضها ٥ فرنكات وقيمة البعض الآخر ٢ فرنكان فكم يلزم عمله من الصنف الاول وكم يلزم عمله من الصنف الثانى

فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٢٧ قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

(المسئلة الثانية)

عربة فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصبعا وعيار البعض الآخر ١٠ اصابع وزنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلوجراما وزنة كل قلة من العيار الثانى ٥٠ كيلوجراما وزنة مجموع القلل ٢٦٩٨ كيلوجراما فكم يكون عدد القلل الموجود فى كل من النوعين

فالجواب عن ذلك ان عدد قلل العيار الاول ٩ قلات وعدد قلل العيار الثانى ٤١ قلة

(المسئلة الثالثة)

٦٠٠ تلميذ يشغلون اربعة ادوار من مدرسة بشرط ان يكون عدد تلامذة الدور الاول ضعف عدد تلامذة الدور الرابع وان مجموع تلامذة الدور الثانى والثالث يعادل مجموع تلامذة الدور الاول والرابع وان عدد تلامذة الدور الثالث $\frac{5}{7}$ تلامذة الدور الثانى فكم يوجد من التلامذة فى كل دور من الادوار الاربعة المذكورة

فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ فى الدور الاول و ١٧٥ فى الدور الثانى و ١٢٥ فى الثالث و ١٠٠ فى الرابع

(المسئلة الرابعة)

ثلاث صبر من خليط الغلال فى شونة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى تحتوى على ٨٠ اوقة من القمح و ١٢ اقة من الذرة و ٨ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة و ٢٠ اقة من الشعير فما يلزم اخذه من كل صبرة لتكون صبرة رابعة كل مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة و ١٢ من الشعير

فالجواب من ذلك ان مايلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

(مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة فى الدرجة الثانية)

(المسئلة الاولى)

من المقرر فى علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة لمربعات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٤٫٩٠٤٥ امتار فى مدة سقوطه فى اول ثانية فما يكون مقدار الثوانى اللازمة لسقوط الجسم المذكور من ارتفاع قدره ١٣٢٫٥٣٤٧ ميترا

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سـ لعدد الثوانى اللازمة لسقوط الجسم من الارتفاع المعين فتحدث هذه المتناسبة

٤٫٩٠٤٥ : ١٣٢٫٥٣٤٧ :: ١ : سـ^2 ومنها يستخرج

سـ^2 = $\frac{١٣٢٫٥٣٤٧}{٤٫٩٠٤٥}$ = $\frac{١٣٢٥٣٤٧}{٤٩٠٤٥}$ = ٢٧٫٠٢ ومنها يستخرج

سـ = ± $\sqrt{٢٧٫٠٢}$ = ± ٥٫٢

ومقدار

ومقدارا س معا يحققان المعادلة $س^2 = \frac{١٣٣٫٥٣٤٧}{٤٫٩٠٤٥}$ واما المقدار الموجب للمجهول س وهو ٢و٥ ثوان فهو حل المسئلة

(المسئلة الثانية)

يمكن اعتبار الحزم اللازمة لتماسك طابية كاسطوانات قائمة فاذا كان مقدار من المواد كاف لصناعة ٢٥ حزمة قطر قاعدة كل منها ٣٢٥ مليمتر واريد عمل المقدار المذكور ٣٦ حزمه طولها كطول حزم النوع الاول فما يكون قطر كل حزمة من هذا النوع الاخير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لقطر حزمة النوع الثانى وبالحرف م لحجم المقدار المذكور فيكون $\frac{م}{٢٥}$ هو حجم اسطوانة النوع الاول و $\frac{م}{٣٦}$ حجم اسطوانة النوع الثانى ومن حيث ان نسبة حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها كما هو مقرر فى الهندسة تحدث هذه المتناسبة

$$\frac{م}{٢٥} : \frac{م}{٣٦} :: (٣٢٥)^2 : س^2$$ اى

$$٣٦ : ٢٥ :: ١٠٥٦٢٥ : س^2$$

فحينئذ

$$س^2 = \frac{١٠٥٦٢٥ \times ٢٥}{٣٦} = \frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}$$ ومنها يستخرج

$$س = \pm \sqrt{\frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}} = \frac{\sqrt{٢٦٤٠٦٢٥}}{\sqrt{٣٦}} =$$

$$\pm \frac{١٦٢٥}{٦} = \pm ٢٧٠٫٨$$

وحينئذ يكون القطر المطلوب ٢٧١ مليمترا تقريبا و [illegible]

(المسئلة الثالثة)

من المعلوم ان خزنة تكون اسطوانة قائمة وسعة خزنة يكون لمدى عيار [illegible] ١٢ اصبعا ٣٢٥ مليمترا مكعب [illegible]

عباره ٨ اصابع تعادل ٢١٧ مليمترا مكعبا فاذا كان قطر قاعدة الهون الاول ١٢٦ مليمترا اعنى ٨ غ ٤ صم فما يكون قطر الهون الثانى بفرض ان عمق الخزنتين واحد وان خزنة الهون الاول تسع

اواق ط
١٦٩٣ جراما من البارود اى ½ ٧ ـ ٣ وان خزنة الهون الثانى تسع

اوقية ط
٦٣٥ جراما من البارود اى ½ ٢٠ ـ ـ

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها وان نسبة حجوم خزن الاهوان الى بعضها كنسبة زنات البارود المحتوية عليه هذه الخزن الى بعضها فتحدث هذه المتناسبة

$$١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦)^٢ : س^٢ \text{ اى}$$

$$\sqrt{١٦٩٣} : \sqrt{٦٣٫٥} :: ١٢٦ : س \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{١٢٦ \times \sqrt{٦٣٥}}{\sqrt{١٦٩٣}} = ١٢٦ \sqrt{\frac{٦٣٥}{١٦٩٣}} =$$

$$١٢٦ \times \sqrt{٠٫٣٧٥٠٧٤} = ١٢٦ \times ٠٫٦١٢ = ٧٧ \text{ مليمترا}$$

فحينئذ يكون القطر المطلوب ٧٧ مليمترا اى ١٠ غ ٢ صم تقريبا

(المسئلة الرابعة)

اذا كان ارتفاع الميل الداخلى لطابية استحكامات يعادل ٢٫٢٧٤ اى

اقدام
٧ وقاعدته تعادل ٠٫٧٥٨ م اى ٤ ٢ صم ى اى ثلث الارتفاع فما يكون طول هذا الميل

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر في الهندسة فيحدث

$$س^٢ = (٢٫٢٧٤)^٢ + (٠٫٧٥٨)^٢$$ اى

$$س^٢ = ٥٫٧٤٥٦٤٠$$ ومنها يستخرج

$$س = \pm \sqrt{٥٫٧٤٥٦٤٠} = \pm ٢٫٣٩٧$$

فحينئذ يكون طول الميل المذكور ٢٫٣٩٧ م

(المسئلة الخامسة)

ما العدد الذي اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا مقدار هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لهذا العدد فيحدث هذه المعادلة

$$س^٢ + ١٣٢ = ٢٣ س$$ ومنها يستخرج

$$س = \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{(٢٣)^٢}{٤} - ١٣٢} = \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٥٢٩ - ٥٢٨}{٤}}$$ و

$$س = \frac{٢٣ \pm \sqrt{١}}{٢} = \frac{٢٣ \pm ١}{٢}$$

واذا رمز لمقداري س بالحرفين سَ و سً يكون

$$سَ = \frac{٢٣ + ١}{٢} = ١٢$$ و

$$سً = \frac{٢٣ - ١}{٢} = ١١$$

فحينئذ كل من العددين ١٢ و ١١ يحقق منطوق المسئلة

(المسئلة السادسة)

الاى اشترى مقدارا من الخيل بمبلغ ٤٥٠٠٠ غرش واخر اشترى مقدارا من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الالاى الاول ١٥ حصانا بمبلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرش بفرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل

الالاى الثانى ينقص عن ثمن الحصان الواحد من خيل الالاى الاول بمبلغ قدره ٢٠٠ غرش فكم يكون عدد خيول كل الاى وكم يكون ثمن كل حصان منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف $س$ لعدد خيل الالاى الاول فيكون $س + ١٥$ عدد خيل الالاى الثانى و $\frac{٤٥٠٠٠}{س}$ ثمن كل حصان من خيل الالاى الاول و $\frac{٦٤٠٠٠}{س+١٥}$ ثمن كل حصان من خيل الالاى الثانى فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{س} = \frac{٦٤٠٠٠}{س+١٥} + ٢٠٠$$

فاذا حذفت المقامات ثم اختصرت المعادلة وقسمت على مكرر المجهول ذى الدرجة الثانية حدث

$$س^٢ + ١١٠ س = ٣٣٧٥$$ ومنها يستخرج

$$س = -٥٥ \pm \sqrt{(٥٥)^٢ + ٣٣٧٥}$$ او

$$س = -٥٥ \pm \sqrt{٣٠٢٥ + ٣٣٧٥} = -٥٥ \pm \sqrt{٦٤٠٠}$$ أو

$$س = -٥٥ \pm ٨٠$$ اى $سَ = ٢٥$ و $سً = -١٣٥$

فامقدار $سَ = ٢٥$ فانه يكون عدد خيل الالاى الاول وبناء على ذلك يكون العدد $٢٥ + ١٥$ اى ٤٠ عدد خيل الالاى الثانى واما مقدار $سً = -١٣٥$ فانه محقق للمعادلة فقط

(المسئلة السابعة)

ثلاث فرق من انفار اذا اشتغلت معا فى شغلة معينة اتمتها فى ظرف ١٥ ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدتها فان الاولى تستغرق اربعة اخماس الزمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المذكورة وان الثانية تستغرق قدر ما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذي تستغرقه كل فرقة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للزمن الذي تستغرقه الفرقة الثانية في اتمام الشغلة المذكورة فيكون $\frac{٤س}{٥}$ هو الزمن الذي تستغرقه الفرقة الاولى ويكون س + ١٥ هو الزمن الذي تستغرقه الفرقة الثالثة واذا قدرنا ايضا مقدار الشغل بالعدد ١ يكون $\frac{١}{\frac{٤س}{٥}}$ هو مقدار شغل الفرقة الاولى في ساعة واحدة و $\frac{١}{س}$ مقدار شغل الفرقة الثانية في ساعة واحدة و $\frac{١}{س+١٥}$ مقدار شغل الفرقة الثالثة في ساعة واحدة فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{١٥}{س} + \frac{١٥}{\frac{٤س}{٥}} + \frac{١٥}{س+١٥} = ١$$ اى

$$\frac{٧٥}{٤س} + \frac{١٥}{س} + \frac{١٥}{س+١٥} = ١$$ وبحذف المقامات يحدث

$$٧٥س + ١١٢٥ + ٦٠س^{٢} + ٩٠٠س + ٦٠س^{٢} = ٤س^{٣} + ٦٠س^{٢}$$

وبقسمة جميع الحدود على س وتحويل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واختصارها وتغيير العلامات يحدث

$$٤س^{٢} - ١٣٥س = ٢٠٢٥$$ ومنها

$$س = \frac{١٣٥}{٨} \pm \frac{٢٢٥}{٨}$$

فحينئذ يكون مقدار المجهول

$$س' = ٤٥ \text{ و } س'' = -١١\frac{١}{٤}$$

ومقدار $س' = ٤٥$ هو عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الثانية في اتمام الشغلة المعينة فبناء على ذلك يكون ٣٦ عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الاولى لاتمام مذكورة ويكون ٦٠ عدد الساعات التي تستغرقها الفرقة الثالثة

واما مقدار س = − ١١ ١/٤ فغير موافق لمنطوق المسئلة فلا يكون حلا لها وانما هو محقق للمعادلة فقط

(مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددى)

(المسئلة الاولى)

من المقرر فى علم الطبيعة ان المسافات التى يقطعها الجسم الساقط المجرد عن العوائق فى ظرف اربع ثوان تكون متناسبة عددية فاذا فرض ان قلة استغرقت ٤ ثوان مدة سقوطها فقطعت ٤,٩٠٤م فى الثانية الاولى و ١٤,٧١٣م فى الثانية الثانية و ٢٤,٥٢٢م فى الثانية الثالثة فما مقدار المسافة التى قطعتها القلة المذكورة فى الثانية الرابعة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للمسافة التى قطعتها القلة فى الثانية الرابعة فتحدث هذه المتناسبة

٤,٩٠٤ . ١٤,٧١٣ : ٢٤,٥٢٢ . س ومنها يستخرج

س = ١٤,٧١٣ + ٢٤,٥٢٢ − ٤,٩٠٤ = ٣٩,٢٣٥ − ٤,٩٠٤

او س = ٣٤,٣٣١م

فيكون مقدار س = ٣٤,٣٣١م هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك تكون القلة قد قطعت ٧٨,٤٧٠م فى مدة الاربع ثوانى

(المسئلة الثانية)

قطر قلة عيارها ٢٤ رطلا محصور بين ١٤٩,١٧ مليميترا و ١٤٧,٤٧ مليميترا فما يكون القطر المتوسط لهذه القلة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للقطر المطلوب فتحدث هذه المتناسبة

١٤٩,[illegible] . س : س . ١٤٧,٤٧ ومنها يحدث

[illegible] = [illegible] س = [illegible] مليميترا

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

(مسائل تحل بواسطة التناسب الهندسي)

(المسئلة الاولى)

ماهية جيش يحتوي على ١٣٥٠٠ عسكري بلغت ٢٥٠٢٥٠ غرشا فما مقدار ماهية جيش يحتوي على ١٨٧٥٠ عسكريا بفرض ان ماهية كل نفر من انفار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لماهية الجيش الثاني فتكون ماهية النفر الواحد منه $\frac{س}{١٨٧٥٠}$ وحيث كانت ماهية النفر الواحد من الجيش الاول مبينة بالكسر $\frac{٢٥٠٢٥٠}{١٣٥٠٠}$ حدثت هذه المتساوية

$$\frac{س}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٣٥٠٠}$$ ومن ذلك تحدث هذه المتناسبة

$$س : ١٨٧٥٠ :: ٢٥٠٢٥٠ : ١٣٥٠٠$$

ومنها يستخرج $س = \frac{١٨٧٥٠ \times ٢٥٠٢٥٠}{١٣٥٠٠}$ اى

س = ٣٧٥٣٧٥ غرشا وهو ماهية الجيش الثاني [illegible]
مقدار المجهول س من المعادلة

$$\frac{س}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٣٥٠٠}$$ بدون مدخلية التناسب فى ذلك

[illegible]

جيش محاصر [illegible] ٣٠ [illegible] من الجيش المذكور بيوم [illegible] ٣١ [illegible] اللازم اعطاء [illegible] من الجيش بحيث تكفيه [illegible] يوم فالجواب عن ذلك [illegible] للنفر الواحد في [illegible] في كل يوم جيش [illegible] ٢٥ [illegible] يوم من المؤنة في المدة الاولى وبناء على [illegible] تكون [illegible]

$٢٧٥ \times ق \times ٣٠$ وكذا يكون ق س درهما مقدار المنصرف فى كل يوم من المؤنة فى المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ق س × ٣٦ مقدار المؤنة جميعها وحينئذ تحدث هذه المتساوية

$٣٧٥ \times ق \times ٣٠ = ق \times س \times ٣٦$ اى

$٣٧٥ \times ٣٠ = س \times ٣٦$

ومنها تنتج هذه المتناسبة

$٣٦ : ٣٠ :: ٣٧٥ : س$ ومنها يستخرج

$س = \frac{٣٧٥ \times ٣٠}{٣٦} = ٣١٢,٥$ درهما وهو ما يلزم اعطاؤه للنفر الواحد من المؤنة فى المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول س من اول الامر من المعادلة

$٣٦ س = ٣٠ \times ٣٧٥$ بدون مدخلية للتناسب فى ذلك

* (المسئلة الثالثة) *

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء مناسبة لثلاثة اعداد معلومة يقال اذا رمز بالحروف س و ص و ع للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف م و ق و ل للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف ح للعدد المعلوم الذى يراد تقسيمه يحدث بين س و ص هذا الارتباط $\frac{ص}{س} = \frac{ق}{م}$ وبين س و ع هذا الارتباط $\frac{ع}{س} = \frac{ل}{م}$ فمن الارتباط الاول يستخرج $ص = \frac{ق س}{م}$ ومن الارتباط الثانى يستخرج $ع = \frac{ل س}{م}$ وحيث ان $س + ص + ع = ح$ يكون

$س + \frac{ق س}{م} + \frac{ل س}{م} = ح$ اى

$س \frac{(م + ق + ل)}{م} = ح$ ومنه يستخرج

$س = \frac{ح م}{م + ق + ل}$ وبناء على ذلك يكون

$ص = \frac{ح ق}{م + ق + ل}$ و

$ع = \frac{ح ل}{م + ق + ل}$ وهى مقادير الاجزاء المطلوبة

وقد يحدث من هذه المعادلات ثلاث متناسبات هى

$$\text{م} + \text{ه} + \text{ل} : \text{ح} :: \text{م} : \text{س} \quad \text{و}$$

$$\text{م} + \text{ه} + \text{ل} : \text{ح} :: \text{ه} : \text{ص} \quad \text{و}$$

$$\text{م} + \text{ه} + \text{ل} : \text{ح} :: \text{ل} : \text{ع}$$

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة اعداد المتناسبة المعلومة الى العدد الذي يراد تقسيمه كنسبة احد الاعداد المعلومة الى الجزء المطابق له الذي يراد استخراجه.

ويشاهد من ذلك جميعه انه يلزم كثير من المتناسبات وبناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الاجزاء المتناسبة التي يراد استخراجها لكن اذا فرض ان $\frac{\text{ح}}{\text{م}+\text{ه}+\text{ل}} = \text{ك}$ امكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المذكور يكون

$\text{س} = \text{م}\,\text{ك}$ و $\text{ص} = \text{ه}\,\text{ك}$ و $\text{ع} = \text{ل}\,\text{ك}$ اعني انه بضرب خارج قسمة ح على $\text{م} + \text{ه} + \text{ل}$ في العدد الاول يتكون الجزء الاول الذي يراد استخراجه وبضربه في العدد الثاني يتكون الجزء الثاني وبضربه في العدد الثالث يتكون الجزء الثالث وقس على ذلك ولنمثل لذلك بمثالين فنقول

(المثال الاول)

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠,٥ من الغروش على عشرة بلوكات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار البلوكات بفرض ان عدد [illegible] البلوك الاول ١٠٠ والثاني ٩٦ والثالث ١٠٤ والرابع ١٠٢ والخامس ٩٥ والسادس ٩٢ والسابع ٩٠ والثامن [illegible] والتاسع ٨٤ والعاشر ٨٠ فلحل ذلك يقال من حيث ان عدد [illegible] البلوكات جميعها يعادل ٩٣١ يكون $\text{ك} = \frac{٢٣٧٤٠,٥}{٩٣١}$ = ٢٥,٥٠ غرشا وبمقتضى ما ذكر في [illegible] - ضرب ٢٥,٥٠ غرشا المساوي ك في عدد انفار كل فرقة [illegible] المقسوم عليه كل بلوك من الغروش فحينئذ يخص البلوك الاول ٢٥٥٠ غرشا و [illegible]

٢٤٤٨ والثالث ٢٦٥٢ والرابع ٢٦٠١ والخامس ٢٤٢٢،٥٠ والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥٠ والثامن ٢٢٤٤ والتاسع ٢١٤٢ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا

ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث ان خارج قسمة ٢٣٧٤٠،٥ غرشا على العدد ٩٣١ الذى هو مجموع عدد انفار البلوكات يعين ما يخص النفر الواحد يكون بناء على ذلك جدول هكذا

نفر	غروش
١	٢٥،٥٠
٢	٥١،٠٠
٣	٧٦،٥٠
٤	١٠٢،٠٠
٥	١٢٧،٥٠
٦	١٥٣،٠٠
٧	١٧٨،٥٠
٨	٢٠٤،٠٠
٩	٢٢٩،٥٠

ثم يبقى شئ غير اجراء عملية الجمع فقط هكذا

البلوك الاول		البلوك الثانى	
عدد الانفار	ما يخص البلوك من غروش	عدد الانفار	ما يخص الانفار المذكورة من الغروش
١٠٠	٢٥٥٠	٩٠	٢٢٩٥

وبيان ذلك ان يقال حيث ان عدد انفار البلوك الاول يبلغ ١٠٠ نفر فلتحصيل مايخصه من الغروش يؤخذ مايقابل العدد ١ من الجدول وتقدم الشرطة جهة اليمين خانتين فيتحصل مايخصه وهو ٢٥٥٠ غرشا وكذلك لتحصيل مايخص البلوك الثانى يحلل العدد ٩٦ الذى هو عدد انفاره الى ٩٠ + ٦ فاما لتحصيل مايخص ٩٠ اى ٩ عشرات فيؤخذ من الجدول مايقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة اليمين خانة واحدة فيكون مايخص العدد ٩٠ نفرا هو ٢٢٩٥ واما تحصيل مايخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٣ غرشا المقابل للعدد ٦ فيكون ٢٤٤٨ مايخص ٩٦ نفرا

وعلى مثل ذلك يكون العمل فى الثمانية بلوكات الاخر

(المثال الثانى)

المطلوب تقسيم ٤٣٥٤٤ مترا مكعبا يراد حفرها لعمل خندق على ٩ الايات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار الالايات بفرض انه يوجد فى الالاى الاول ١٨٥٠ نفرا وفى الثانى ٢٠٠٣ وفى الثالث ١٠٢٧ وفى الرابع ١٥٠٠ وفى الخامس ١٧١٤ وفى السادس ٩٨٠ وفى السابع ١٩٢٥ وفى الثامن ٢٥١٨

فلحل ذلك يقال حيث ان مجموع انفار الالايات جميعها يعادل ١٣٥١٧ نفرا يكون ك = $\frac{٤٣٥٤٤}{١٣٥١٧}$ = ٣٢ مترا مكعبا وهو مايخص النفر الواحد وبناء على ذلك يركب هذا الجدول

نمرة	يخصه مترا مكعبا
١	٣٢
٢	٦٤
٣	٩٦
٤	١٢٨
٥	١٦٠
٦	١٩٢
٧	٢٢٤
٨	٢٥٦
٩	٢٨٨

ومنه يستنتج كما فى المثال المتقدم ما يخص كل الاى

وهاك الجدول الذى يعين به ما يخص كل الاى

نمرة الالاى	عدد الانفار	ما يخص كل الاى من الامتار المكعبة
١	١٨٥٠	٥٩٢٠٠
٢	٢٠٠٣	٦٤٠٩٦
٣	١٠٢٧	٣٢٨٦٤
٤	١٥٠٠	٤٨٠٠٠
٥	١٧١٤	٥٤٨٤٨
٦	٩٨٠	٣١٣٦٠
٧	١٩٢٥	٦١٦٠٠
٨	٢٥١٨	٨٠٥٧٦

ومثل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الغروش على عدة قرى معلومة بحيث تكون اجزاء التوزيع مناسبة لمقادير اطيان هذه القرى المذكورة او تقسيم مقدار من المكعبات يراد ردمها او حفرها لانشاء جسر وزعه على عدة قرى بحيث تكون اجزاء التقسيم مناسبة لمقادير انفار هذه

القرى وقس على ذلك جميع الامثلة التى تكون من هذا القبيل

(المسئلة الرابعة)

المطلوب تقسيم انعام قدره ٩٥٩٠٫٩٥ غرشا على خادمين بحيث يكون جزءا القسمة مناسبين لماهيتهما ولمدة مكثهما فى الخدمة بفرض أن ماهية الاول فى السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكثه فى الخدمة ١٥ سنة وأن ماهية الثانى فى السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكثه فى الخدمة ٢٠ سنة

والحل ذلك يقال حيث ان جزئى القسمة مناسبان لحاصلى ضرب الماهيتين فى المدتين اعنى مناسبين ٦٠٠٠×١٥ اى ٩٠٠٠٠ و ٥٠٠٠×٢٠ اى ١٠٠٠٠٠ فيكون ما يخص الخادم الاول بمقتضى ما تقدم ٤٥٤٠٫٤٥ غرشا وما يخص الثانى ٥٠٥٠٫٥٠ غرشا

(المسئلة الخامسة)

٣٠٠ عامل مكثوا ٥٠ يوما فى عمل قطعة استحكامات طولها ٢٠٠ متر وعرضها ٦ امتار وعمقها متران ولم يكن شغلهم فى اليوم الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لعمل قطعة استحكامات اخرى طولها ١٨٠ مترا وعرضها ٨ امتار وعمقها ٢٫٥ مترين فى ظرف ٤٠ يوما بشرط ان يشتغلوا فى اليوم الواحد الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة يجب بسطها ونظمها فى سلك القاعدة الثلاثية البسيطة بتحويل الاثنى عشر عددا المحتوى عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرمز بالحرف س للعدد المطلوب من العملة ثم يقال حيث أن ٣٠٠ عامل شتغلت ٥٠ يوما فى كل يوم ٨ ساعات يكون ٣٠٠×٨×٥٠ أى ١٢٠٠٠٠

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى فى ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان س عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى فى ظرف ٤٠ يوما فى كل يوم ١٠ ساعات يكون س × ٤٠ × ١٠ اى ٤٠٠ س هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخري فى ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان مكعب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل ٥٠٠ × ٦٠ × ٢ اى ٢٤٠٠ متر مكعب وان مكعب القطعة الثانيه يعادل ١٨٠ × ٨ × ٥ و٢ اى ٣٦٠٠ متر مكعب تؤل المسئلة الى ابسط منها وهى ان يقال حيث ١٢٠٠٠٠ عامل اشتغلوا ٢٤٠٠ متر مكعب فى ظرف ساعة واحدة وان ٤٠٠ س عامل اشتغلوا ٣٦٠٠ متر مكعب فى ظرف ساعة واحدة تحدث هذه المتناسبة

٢٤٠٠ : ٣٦٠٠ :: ١٢٠٠٠٠ : ٤٠٠ س ومنها يستخرج ٤٠٠ س $= \frac{١٢٠٠٠٠ \times ٣٦٠٠}{٢٤٠٠} =$ ١٨٠٠٠٠

و س $= \frac{١٨٠٠٠٠}{٤٠٠} =$ ٤٥٠

فحينئذ يلزم ٤٥٠ فاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى فى المدة المعينة فى رأس السؤال

(مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العدديه)

بملاحظة ماهو مقرر فى علم الميكانيكا فى قواعد تحرك سقوط الاجسام من ان المسافة التى يقطعها جسم ساقط فى زمن قدره ز تعادل $\frac{١}{٢}$ ح ز^{٢} بفرض ان ح مقدار جذب الارض للاجسام وهو بمقتضى مادلت عليه التجاريب يساوى ٩٫٨٠٨ امتار فى الثانية الواحدة فى باريس و٩٫٧٨٠ امتار تقريبا فى مصر تحل مسألتان الاولى والثانية من المسائل الآتية

(المسئلة الاولى)

ما الارتفاع الذى تصل اليه نبلة تستغرق فى صعودها زمنا كالزمن الذى

تستغرقه فى الهبوط بفرض انها تستغرق فى الصعود والهبوط زمنا قدره عشر ثوان

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للارتفاع المطلوب فيكون

$س = \frac{1}{2} ح ز^{2} = ٤٫٩٠٤ \times ز^{2}$ وحيث كان ز = ٥ يكون

$س = ٤٫٩٠٤ \times ٥^{2} = ٤٫٩٠٤ \times ٢٥ = ١٢٢٫٦٠٠$

مترا وهو الارتفاع المطلوب

(المسئلة الثانية)

جسم سقط من اعلى منارة ارتفاعها ٧٨٫٤٦٤ مترا فما يكون مقدار الزمن الذى استغرقه الجسم المذكور فى سقوطه

فالجواب عن ذلك ان يقال من المعادلة $س = \frac{1}{2} ح ز^{2}$ اى ٧٨٫٤٦٤

$= ٤٫٩٠٤ \times ز^{2}$ يستنتج $ز^{2} = \frac{٧٨٫٤٦٤}{٤٫٩٠٤} = ١٦$ اى ز = ٤

اعنى ان الجسم المذكور يستغرق فى سقوطه مقدارا من الزمن قدره ٤ ثوان

(المسئلة الثالثة)

غيطانى كان يسقى مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن مجاورتها ٥ امتار بشرط ان البئر الذى يؤخذ منه الماء على امتداد خط الشجر بعيدا عن الشجرة الاولى بمقدار عشرة امتار فما تكون المسافة التى يقطعها الغيطانى المذكور فى الذهاب والاياب لسقى الماية شجرة المذكورة

فالجواب عن ذلك انه اذا تؤمل فى منطوق المسئلة يشاهد ان الغيطانى المذكور يقطع ٢٠ مترا فى سقى الشجرة الاولى و ٣٠ مترا فى سقى الثانية و ٤٠ مترا فى سقى الثالثة و ٥٠ مترا فى سقى الرابعة وهلم جرا فبناء عليه تكون المسافة التى يقطعها الغيطانى المذكور لسقى الشجر جميعه حاصل جمع حدود

متوالية عددية حدها الاول ح = ٢٠ واساسها س = ١٠
وعدد حدودها ن = ١٠٠ ويستنتج هذا الحاصل من القانون

$$ع = \frac{٢ح ن + ن س (ن - ١)}{٢}$$ بوضع مقادير ح و ن و س بدلها
فاذن يحدث

$$ع = \frac{٢ \times ٢٠ \times ١٠٠ + ٩٩ \times ١٠٠٠}{٢} = \frac{٩٩٠٠٠ + ٤٠٠٠}{٢}$$ اى
ع = ٥١٥٠٠ متر اى ٥١ر٥ ميرياميترات اى ١٢. فرسخا
تقريبا

(المسئلة الرابعة)

غيطانى قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترا فى ذهابه وايابه لسقى مقدار من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن مجاورتها ٥ امتار ولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقيها كان قد قطع مسافة قدرها ٥٢٠ مترا مبدءها البئر الذى كان يفترق منه الموضوع على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والبعد الذى بين البئر والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث أن المسافة التى قطعها الغيطانى لسقى الشجر جميعه فى الذهاب هى عين المسافة التى قطعها فى الاياب تكون المسافة التى قطعها فى الذهاب او الاياب مبينة بهذا المقدار $\frac{١٣٧٥٠}{٢}$ المساوى ٦٨٧٥ مترا وكذلك تكون المسافة التى قطعها لسقى الشجرة الاخيرة فى الاياب او الذهاب مبينة بهذا المقدار $\frac{٥٢٠}{٢}$ المساوى ٢٦٠ وبناء عليه يكون من المسافات المقطوعة بالتوالى لسقى الشجر جميعه متوالية عددية اساسها س = ٥ وحدها الاخير ل = ٢٦٠ ومجموع حدودها ع = ٦٨٧٥ ويستخرج عدد حدودها ن من هذا القانون

$$ن = \frac{٢ل + س \pm \sqrt{(٢ل + س)^{٢} - ٨ س ع}}{٢س}$$ بوضع مقادير س و ل
و ع

و ع بدلها فاذا اجريت ذلك تجد $ن = \frac{٥٢٥ \pm ٢٥}{١٠}$ فحينئذ

$ن' = \frac{٥٢٥ - ٢٥}{١٠} = ٥٠$ و $ن'' = \frac{٥٢٥ + ٢٥}{١٠} = ٥٥$ فاما

المقدار $ن' = ٥٠$ فهو حل للمسالة لانه باعتبار ذلك يكون ح مساوى

ل ـ س (ن ـ ١) اى ٢٦٠ ـ ٥ × ٤٩ = ٢٦٠

ـ ٢٤٥ مساويا ١٥ وهو المقدار الذى [illegible] يعنى ان عدد

الشجر يكون ٥٠ شجرة والبعد [illegible] مابين الشجر والبئر [illegible]

منه ١٥ مترا

واما المقدار الآخر $ن''$ المساوى ٥٥ [illegible] حلا [illegible] التى نحن

بصددها لانه باعتبار ذلك يحدث ح = ـ ١٠

غير ان مقدارى ن المتقدمين حلان مما لمتوالية العددية تنازلية [illegible]

اكبر حدودها ل = ٢٦٠ واساسها س = ٥ [illegible]

حدودها ع = ٦٨٧٥

(المسئلة الخامسة)

اذا كان المطلوب البحث عن القانون الذى يعين به حاصل جمع مربعات حدود

متوالية عددية يفرض ان ح و ء و هـ و ز و ..... و ك و ل

حدود متوالية هندسيه تصاعدية و س اساسها و ن عدد حدودها

و ع حاصل جمعها و $ع_٢$ حاصل جمع مربعاتها و $ع_٣$ حاصل جمع

مكعباتها فيحدث

ء = ح + س و هـ = ء + س و ..... و ل = ك + س

وبناء عليه يكون

$$ء^{٣} = (ح+س)^{٣} = ح^{٣} + ٣ح^{٢}س + ٣ح س^{٢} + س^{٣}$$ و

$$هـ^{٣} = (ء+س)^{٣} = ء^{٣} + ٣ء^{٢}س + ٣ء س^{٢} + س^{٣}$$ و

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$ل^{٣} = (ك+س)^{٣} = ك^{٣} + ٣ك^{٢}س + ٣ك س^{٢} + س^{٣}$$

ويجمع هذه المعادلات على بعضها حدا على حد بالتناظر يحدث .

$$ع_{٣} - ح^{٣} = ع_{٣} - ل^{٣} + ٣س(ع_{٢} - ل^{٢}) + ٣س^{٢}(ع_{١} - ل)$$

$$+ س^{٣}(ن - ١)$$ أو

$$ح^{٣} = ل^{٣} - ٣س(ع_{٢} - ل^{٢}) - ٣س^{٢}(ع_{١} - ل) - س^{٣}(ن - ١)$$

ومن هذه المعادلة يحدث

$$ع_{٢} = \frac{٣س ل^{٢} + ل^{٣} - ح^{٣} - ٣س^{٢}(ع_{١} - ل) - س^{٣}(ن - ١)}{٣س} \quad \ldots \quad (١)$$

وحيث ان $ل = ح + س(ن - ١)$ و $ع_{١} = (٢ح + ن س - س)\frac{ن}{٢}$

يسهل معرفة $ع_{٢}$ اى حاصل جمع مربعات حدود المتوالية متى علم

$ح$ و $س$ و $ن$.

واذا كان المطلوب ايجاد حاصل جمع مربعات حدود متوالية السرد الطبيعى للاعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ... ل يكفى فى قانونى (١) و (٢) فرض ان $ح = ١$ و $س = ١$ وكذا $ل = ن$ فيحدث

$$ع_{١} = \frac{ن(ن+١)}{٢} .$$

$$ع_{ن} = \frac{٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ن}{٦}$$ او

$$ع_{ن} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١×٢×٣}$$

فهذا هو القانون المطلوب

في تطبيق هذا القانون على معرفة عدد القلل الموجودة في احدى الكومات الثلاث المعتاد تشكيلها في جبخانات الطوبجية اذ من المعلوم انهم يضعون القلل والقبر والبنب على ثلاث صور متنوعة وهي الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة الممتدة المستطيلة القاعدة

(في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة)

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة التربيع بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا سلكنا هذا الترتيب يكون في الطبقة الاولى قلة واحدة وفي الطبقة الثانية اربع قلل وفي الثالثة تسع قلل وفي الرابعة ست عشرة قلة وفي الخامسة خمسة وعشرون وهكذا الى الطبقة التي نمرتها ن فانها تحتوي على $ن^{٢}$ قلة والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع قلل الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع ن (و ن يدل على عدد القلل التي يحتوي عليها كل ضلع من القاعدة او كل حرف من احرف الكومة)

فاذا رمز بالحرف $ع_{ن}$ لعدد القلل المحتوية عليها الكومة يكون بمقتضى ماتقدم

$$ع_{ن} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١×٢×٣}$$

وهاك جدولا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطبقات ١٢ فاقل وهو محقق للقانون ايضا

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٣٠
٥	٢٥	٥٥
٦	٣٦	٩١
٧	٤٩	١٤٠
٨	٦٤	٢٠٤
٩	٨١	٢٨٥
١٠	١٠٠	٣٨٥
١١	١٢١	٥٠٦
١٢	١٤٤	٦٥٠

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القلل الموجود في كل حرف من الكومة والصف الثاني يدل على عدد القلل الموجودة في كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد القلل الموجودة في الكومة بتمامها

فاذا كان ن = ١٠ مثلا اعني انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون الى $ع_{٢} = \frac{١٠\times١١\times٢١}{٦} = ٣٨٥$ كما هو مبين بالجدول

(في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية)

هذه الكومة تتركب من طبقات مثلثية متزايدة السعة بالابتداء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوي الاضلاع ماعدا الطبقة الاولى فانها لا تحتوي الا على قلة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوي على قلتين وضلع الثالثة على ثلاث قلل وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة الاخيرة فان ضلعها يحتوي على ن قلة وعدد القلل التي تحتوي عليها اي

طبقة

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الاول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوى عدد القلل التى يحتوى عليها كل ضلع من الطبقة المذكورة فحينئذ اذا كان ضلع الطبقة يحتوى على ه قلة فالطبقة تحتوى على $\frac{ه^{٢}+ه}{٢}$ قلة اى $\frac{١}{٢}(ه^{٢}+ه)$ فاذا كانت ه تساوى على التعاقب ١ و٢ و٣ و٤ الخ فالطبقات تحتوى على $\frac{١}{٢}(١^{٢}+١)$ و $\frac{١}{٢}(٢^{٢}+٢)$ و $\frac{١}{٢}(٣^{٢}+٣)$ و $\frac{١}{٢}(٤^{٢}+٤)$ و.... $\frac{١}{٢}(ه^{٢}+ه)$ قلة فاذا كان $ع_{٢}$ رمزا لعدد القلل الموجودة فى الكومة كما تقدم يتحصل

$$ع_{٢}=\frac{١}{٢}(١^{٢}+١)+\frac{١}{٢}(٢^{٢}+٢)+\frac{١}{٢}(٣^{٢}+٣)+\cdots+\frac{١}{٢}(ه^{٢}+ه)$$

$$=\frac{١}{٢}(١^{٢}+٢^{٢}+٣^{٢}+٤^{٢}+\cdots+ه^{٢})+\frac{١}{٢}(١+٢+٣+\cdots+ه)$$

$$=\frac{ه(ه+١)(٢ه+١)}{١٢}+\frac{ه^{٢}+ه}{٤}=\frac{ه(ه+١)(ه+٢)}{١\times٢\times٣}$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كما فعل ذلك بالكومة المتقدمة يقال حيث كانت الطبقة التى ضلعها يحتوى على ه قلة تتركب من صفوف مكونة متوالية عددية كالمتوالية المكونة من اعداد السرد الطبيعى ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و .... و ه يكون عدد القلل الموجود فى هذه الطبقة مساويا ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ه وبناء على ذلك يتركب هذا الجدول

عدد قلل الطبقات

فى الطبقة الاولى	١ = ١
فى الثانية	١ + ٢ = ٣
فى الثالثة	١ + ٢ + ٣ = ٦
فى الرابعة	١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠
فى النونية	١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ه

وبالتامل فى هذا الجدول يشاهد ان كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب الى العدد الدال على نمرة الطبقة ويقتضى ذلك يحدث هذا الجدول

كومة	طبقة	حرف
١	١	١
٤	٣	٢
١٠	٦	٣
٢٠	١٠	٤
٣٥	١٥	٥
٥٦	٢١	٦
٨٤	٢٨	٧
١٢٠	٣٦	٨
١٦٥	٤٥	٩
٢٢٠	٥٥	١٠
.	.	.
.	.	.
.	.	.
لخ	لخ	لخ

فالصف الاول يدل على عدد القلل التى يحتوى عليها كل حرف من احرف الكومة او على عدد طبقات الكومة والثانى يدل على عدد القلل الموجودة فى كل طبقة واعداد هذا الصف متكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ الى العدد الدال على نمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد القلل الموجود فى الكومة بتمامها واعداد هذا الصف متكونة من اضافة جميع اعداد الصف الثانى لبعضها على التعاقب الى العدد

الذى

الذى نرمزله بعدد طبقات الكومة وحينئذ فكل من هذه الحواصل يبين بالضرورة مجموع قلل الكومة بتمامها لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة فاذن يوجد ٢٢٠ قلة فى الكومة التى عدد طبقاتها ١٠ وتحقيق ذلك انه اذا وضع ١٠ بدل ن فى القانون

$$ع_{٣} = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٦} \quad \text{آل الى}$$

$$ع_{٣} = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢}{٦} = ٢٢٠$$

وهذا ناتج عين الناتج المبين بالجدول

(فى حساب الكومة الممتدة المستطيلة القاعدة)

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلية متزايدة السعة بالابتداء من القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوى على صف واحد من القلل فقط فاذا رمز بالحرف م لعدد القلل الكائنة فيه يكون فى الطبقة الثانية صفان من القلل فى كل صف منهما م + ١ قلة وفى الطبقة الثالثة ٣ صفوف فى كل صف م + ٢ قلة وفى الطبقة الرابعة ٤ صفوف فى كل صف منها م + ٣ قلة وفى الطبقة النونية ن صفا فى كل صف منها م + ن − ١ قلة وبالبناء على ذلك فعدد القلل التى فى الطبقة النونية يكون $ن(م + ن - ١) = ن م + ن^{٢} - ن$

فاذا وضع بدل ن اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و .... و ن بالتوالى فى هذا القانون يحدث

فى الطبقة الاولى	$م + ١^{٢} - ١$
وفى الثانية	$٢م + ٢^{٢} - ٢$
وفى الثالثة	$٣م + ٣^{٢} - ٣$
وفى الرابعة	$٤م + ٤^{٢} - ٤$
⋮	⋮
وفى الطبقة النونية	$ن م + ن^{٢} - ن$

واذا رمز بالحرف ع لحاصل جمع الطبقات يكون

$$\text{ع} = \text{م}(١+٢+٣+٤+\cdots+\text{ن}) + (١^{٢}+٢^{٢}+٣^{٢}+\cdots+\text{ن}^{٢})$$

$$-\,(١+٢+٣+٤+\cdots+\text{ن}) \quad \text{او}$$

$$\text{ع} = \text{م} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦} - \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} \times \left(\text{م} + \frac{٢\text{ن}+١}{٣} - ١\right)$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٣\text{م}+٢\text{ن}-٢)}{٦}$$

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة الا باعطاء م مقدارا اختياريا فاذا فرض ان م = ١٠ مثلا تحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٣٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩	٨٨٠
..	...	...
خ	خ	خ

فالصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جانبي وهذا الصف ايضا يدل على رتب الطبقات فى الكومة المعلومة والصف الثانى يدل على عدد القلل التى توجد فى الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

يتكون من القانون ن(م+ن-١) المتقدم بفرض م=١٠ واعطاء ن جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و .... ون بالتوالى والصف الثالث اى عدد منه يحسب باضافة اعداد الصف الثانى من ابتداء العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قلل الكوم المتناظرة وحينئذ فالحد العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكومة المستطيلية المركبة من ١٠ طبقات والقانون ع = $\frac{ن(ن+١)(٣م+٢ن-٢)}{٦}$ اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١٠ بدل ن ال الى

ع = $\frac{١٠×١١×٤٨}{٦}$ = ٨٨٠ وهو ناتج موافق للناتج الموجود بالجدول هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم تحسب الكومة التامة والكومة التى لزم اضافتها لتتميم الكومة الناقصة والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة ولنمثل لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤ طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكاملة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨×٩×١٧}{٦}$ = ٢٠٤ قلة فاذا حذف منها $\frac{٤×٥×٩}{٦}$ = ٣٠ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتممة فالباقى الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القلل الكائن فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨×٩×١٠}{٦}$ = ١٢٠ قلة فاذا حذف منها $\frac{٣×٤×٥}{٦}$ = ١٠ قلات وهو المقدار الذى يوجد فى الثلاث طبقات المتممة فالباقى ١١٠ قلة يكون عدد القلل الموجود فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

العليا يحتوى على ١٠ قلات كانت الكومة التامة مركبة من طبقات ومحتوية على $\frac{١٠ \times ١٥ \times ٣٦}{٦}$ = ٦٦٠ قلة فاذا حذف منها $\frac{٤ \times ٥ \times ٢٤}{٦}$ = ٨٠ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتممة يكون الباقى ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

ويتعين المضروب ٣٦ فى هذا المثال بواسطة المضروب ٣ م + ٢ ق ــ ٢ الداخل فى القانون المتقدم وحيث كان ١٥ = م + ق ــ ١ يكون م = ١٥ ــ ١٠ + ١ = ٦ وكذلك يكون المضروب ٢٤ فى الكومة المتممة = ٣ × ٦ + ٢ × ٤ ــ ٢

واذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعد معرفة عدد القلل المحتوية عليه الكومة امكن بواسطة الجدول الممتد امتدادا كافيا لهذا الغرض الاستغناء عن اجراء عملية الحساب بان يبحث فى الخط الثالث عند عدد قلل الكومة فالعدد الموجود فى الخط الاول المقابل لهذا العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة فى الكومة فعلى ذلك اذا كانت الكومة تحتوى على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن ايضا حل هذه المسألة بواسطة القانون ع = $\frac{ق^٣ + ٣ق^٢ + ق٢}{٦}$ الذى فيه كمية ع معلومة بان يستخرج منه كمية ق لكن حيث ان هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيتعسر حلها بالطرق المعتادة يكتفى بالبحث عن الجذر التكعيبى لاعظم مكعب يوجد فى ٣ ع وهذا الجذر التكعيبى يكون مقدارا للكمية ق ان وافق مقدار ع كومة كاملة وبرهانه ان يستخرج من المعادلة المتقدمة هذه المعادلة .

$$٣ع = ق^٣ + \frac{٣ق^٢}{٢} + \frac{١}{٢} ق .$$

ومنه ينتج ٣ ع > $ق^٣$ و ٣ع < $(ق + ١)^٣$.

او ق < $\sqrt[٣]{٣ع}$ و ق + ١ > $\sqrt[٣]{٣ع}$

فعلى ذلك تكون الكمية ن الجذر التكعيبي لاعظم مكعب موجود في كمية

٣ع فاذا تذكرنا ان $(\text{ن}+١)^{٣} = \text{ن}^{٣} + ٣\text{ن}^{٢} + ٣\text{ن} + ١$

يحدث كما فرضنا ٣ع او $\text{ن}^{٣} + \frac{٣\text{ن}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ن} < (\text{ن}+١)^{٣}$

فاذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات الكومة ذات القاعدة المثلثية في

القانون $\text{ع} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{٦} = \frac{\text{ن}^{٣}+٣\text{ن}^{٢}+٢\text{ن}}{٦}$ يحدث

$$٦\text{ع} = \text{ن}^{٣} + ٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$$

وينتج من ذلك

$$٦\text{ع} > \text{ن}^{٣} \text{ و } ٦\text{ع} < (\text{ن}+١)^{٣}$$

فكمية ن تكون حينئذ الجذر التكعيبي لاعظم مكعب موجود

في مقدار ٦ع

واما الكومة المستطيلة بحيث كان يدخل في قانونها

$\text{ع} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٣\text{م}+٢\text{ن}-٢)}{٦}$ ثلاث مجاهيل مختلفة يلزم معرفة

مجهولين من هذه المجاهيل الثلاثة لتعيين الثالث

تم طبع المنحة الزهريه * في الاعمال الجبريه * بمطبعة مدرسة المهندسخانة

الخديويه * الكائنة ببولاق مصر المحميه * ملحوظا بعين عناية

ناظرها من تلافى رتب المجد وتدارك * سعادة علي بيك

مبارك * في اواسط شوال المبارك * الذي هو

من شهور سنة ١٢٦٩ هجريه * على

صاحبها افضل الصلاة

وازكى التحيه

تم

[illegible]